F.DANI H.BOUKHAROUB Y.ELHYHY

NOUVEAU

Rapide Way

Exercices Et Problèms Résolus

1er Cycle Universitaire
Classes Préparatoires

Eléctricité

Optique

Analyse

Algèbre

Chimie

www.rapideway.org

www.rapideway.org

Remerciement :

Nous vous présentons ce manuel dans sa deuxième partie, qui comprend des séries des examens de l'année précédente, accompagné par des modèles de solutions rédigées d'une façon simple et bien détaillée.

Ce support sera utile pour les étudiants de 1er année universitaire pour les filières de physique, chimie et mathématique de faculté des sciences, de sciences et technique ou de classe préparatoire aux grandes écoles.

Il contient à la fois L'électricité, L'optique géométrique, la chimie générale, l'analyse et l'algèbre.

C'est avec un réel plaisir que nous avons effectué ce modeste travail pour que les étudiants : puissent avoir une idée préconçue sur le niveau et le degré de difficulté des examens. Puissent bien assimiler leurs cours. Puissent avoir des supports conçus afin de bien se préparer aux examens, et d'avoir de bonnes notes par la suite.

Nous conseillons les étudiants de bien assimiler leurs cours de chaque matière et aussi de bien travailler les séries de travaux dirigés avant d'aborder la résolution des examens dont le but de bien comprendre les concepts et pour que vous puissiez reconnaitre votre niveau.

Nos remerciements et notre gratitude s'adressent à tous les collègues qui ont participé à la rédaction de tous les documents, merci à tous.

Nous tenons à remercier tous les amis qui ont contribué de loin ou de proche avec leurs encouragement pour la sortie de ce modeste effort sans oublier de remercier tous les fidèles de site RapideWay.org.

Très important :

Si vous souhaitez nous écrire, On vous propose les adresses suivantes :

- Notre adresse électronique : rapideway@gmail.com.
- Notre site web www.rapideway.org
- Notre page Facebook. www.facebook.com/rapideway

En particulier, nous remercions chaleureusement tous ceux d'entre vous qui prennent la peine de nous signaler les petites erreurs qu'ils trouvent dans nos documents.

Nous autorisons quiconque le souhait à placer sur son site un lien vers nos documents, mais on n'autorise personne à les héberger directement. On interdit par ailleurs toute utilisation commerciale de nos documents toute modification ou reproduction sans notre accord.

Sommaire :

Rapide Way

www.rapideway.org

Algèbre :

Contrôle 1 Algèbre 2 SMP, SMA, SMC - 2004/2005

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs de A et les sous-espaces propres associés.
2)
   a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 2

Soit la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ ou $m \in \mathbb{R}$

1) Déterminer les valeurs propre de A_m et les sous-espace propre associés .
   a) Monter que A_m est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A_mP$ soit diagonale.
2) Calculer $(A_{-2})^n$ pour tout$n \in \mathbb{N}^\star$.
3) Soient les suites réelles $(x_n), (y_n)$ et (z_n) définies par les relations :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -2y_n \\ y_{n+1} = -2y_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \\ z_{n+1} = x_n - y_n - z_n \end{cases}$$

Avec $x_0 = 1, y_0 = 1$ et $z_0 = -1$.

On note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a) Monter que ; $U_n = (A_{-2})^n U_0 \forall\, n \in \mathbb{N}^\star$.
   b) En déduire x_n , y_n et z_n en fonction de n .

Exercice 3

Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]=\{P \in \mathbb{R}_2[X] : degP \leq 2\}$ muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par : $f(P) = P' + P \quad \forall\, P \in \mathbb{R}_2[X]$

Ou P' est le polynome dérivé de P.

1) Déterminer la matrice de f relativement à la base B.

2) f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

Corrigé : Contrôle 1 Algèbre 2 SMP, SMA, SMC - 2004/2005

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) On chercher les valeurs propres de A :

On a $\det(A - XI_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2-X & 1 & -1 \\ -4 & 2-X & -2 \\ 2 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & 0 & -X \\ -4 & 2-X & -2 \\ 2 & -1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & -X \\ -2 & 2-X & -2 \\ 1+X & -1 & 1-X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -2 & 2-X \\ 1+X & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -X\big(2-(1+X)(2-X)\big) = -X(2-2+X+X^2-2X)$$

$$\Leftrightarrow -X(2-2+X^2-X) = -X\big(X(X-1)\big) = X^2(1-X)$$

$\Longrightarrow P_A(X) = X^2(1-X)$donc ; 0 est une valeur propre double et 1 une valeur propre simple.

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $E_0 = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

- $E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A.v = 0.v\} \Longrightarrow \begin{cases} -2x+y-z=0 \\ -4x+2y-2z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -2x+y-z=0\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x+z\}$$
$$= \{(x, 2x+z, z) \ \ x,z \in \mathbb{R}^2$$
$$= \{x(1,2,0) + z(0,1,1) \ / \ x,z \in \mathbb{R}^2\}$$
$$= vect\{v_1, v_2\}$$

Avec ; $v_1 = (1,2,0)$ et $v_2 = (0,1,1)$.

- $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A.v = v\} \Longrightarrow \begin{cases} -2x+y-z=x \\ -4x+2y-2z=y \\ 2x-y+z=z \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=-z \\ -4x+2y-2z=0 \\ 2x=y \end{cases}$$

$$E_1 = vect\{v_3\} \ ou \ v_3 = (1,2,-1).$$

2)

a) Toutes les racine de $P_A(X)$ sont dans $\mathbb{R}$ et on a $dimE_0 = 2$ et $dimE_1 = 1$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice

Alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ ou $m \in \mathbb{R}$

1) $P_{A_m}(X) = \det(A_m - XI_3)$

$$\Rightarrow \det(A_m - XI_3) = \begin{vmatrix} m+2-X & -2 & 0 \\ 0 & m-X & 0 \\ 1 & -1 & m+1-X \end{vmatrix}$$
$$= (m+1-X)\begin{vmatrix} m+2-X & -2 \\ 0 & m-X \end{vmatrix}$$
$$= (m+1-X)(m+2-X)(m-X)$$

Donc : $P_{A_m}(X) = (m+1-X)(m+2-X)(m-X)$

Trois valeurs propre distinctes simple ; m , m+1 et m+2.

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $E_0 = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

- $E_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A.v_1 = m.v_1\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = mx \\ my = my \\ x - y + (m+1)z = mz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$E_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0; x = y\} = vect\{(V_1)\}$ Avec $v_1 = (1,1,0)$

- $E_{m+1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A.v_2 = (m+1).v_1\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = (m+1)x \\ my = (m+1)y \\ x - y + (m+1)z = (m+1)z \end{cases}$$

$E_{m+1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\} = vect\{v_2\}$ Avec $v_2 = (0,0,1)$

- $E_{m+2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A.v_3 = (m+2).v_2\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = (m+2)x \\ my = (m+2)y \\ x - y + (m+1)z = (m+2)z \end{cases}$$

$E_{m+2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0 ; x = z\} = vect\{v_3\}$ Avec $v_3 = (1,0,1)$

2) –

a) A_m admet 3 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$ donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de B_cà . Alors on a :

$$D_m = P^{-1} A_m P = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

3) On Calcule $(A_{-2})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{et} D_{-2} = P^{-1}.A_{-2}.P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 \\ v_2 = e_3 \\ v_3 = e_1 + e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 - v_2 \\ e_3 = v_2 \\ e_2 = v_3 - v_1 + v_2 \end{cases}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice inverse de .

On a $D_{-2} = P^{-1}.A_{-2}.P \Rightarrow A_{-2} = D_{-2}.P^{-1}.P$

$$\Rightarrow (A_{-2})^n = P(D_{-2})^n.P^{-1}$$

Avec : $(D_{-2})^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors ;

$$(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ (-1)^n & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}$$

4)

a) On a $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ Et $U_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow U_{n+1} = A_{-2}.U_n$ Avec $A_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $U_n = A_{-2}.U_{n-1}$

$\Longrightarrow U_{n+1} = (A_{-2})^2 U_{n-1} = (A_{-2})^3 U_{n-2}$ Avec $(U_{n-1} = A_{-2}.U_{n-2})$

$$U_{n+1} = (A_{-2})^n U_0$$

Donc : $U_n = (A_{-2})^n U_0 \forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, on peut le obtenir par récurrence .

b) – on a $U_n = (A_{-2})^n U_0 \forall\, n \in \mathbb{N}^\star$. Avec $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

et$U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aussi $(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ (-1)^n & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}$

alors : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ (-1)^n & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ (-1)^n & (-1)^n & -(-1)^n \end{pmatrix}$$

Donc : $\begin{cases} x_n = (-2)^n \\ y_n = (-2)^n \quad n \in \mathbb{N} \\ z_n = (-1)^{n+1} \end{cases}$

Exercice 3

1) $f(P) = P' + P \forall\, P \in \mathbb{R}_2[X]$.

On a $(1) = 0 + 1$; $f(X) = 1 + X$; $f(X^2) = 2X + X^2$ par siute on a $A = M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P_f(X) = P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 2 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3$$

$P_f(X) = (1-X)^3$

2)

$\lambda = 1$ est une valeur proper triple de .

$$E_1 = \{(x,,y,z) \in \mathbb{R}^3 / Av_1 = v_1\} \Longrightarrow \begin{cases} x + y = x \\ y + 2z = y \\ z = z \end{cases}$$

$= \{(x,,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = z = 0\} = vect\{v_1\}$avec$v_1 = \{1\}$

On a $E_1 = 1 < 3$, donc f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Contrôle 2 Algèbre 2 SMP, SMA, SMC - 2008/2009

Exercice 1

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$et on considère l'endomorphisme f de donné par :

$$f(e_1) = e_1 + e_3, f(e_2) = e_{1+}e_2 , f(e_3) = -2e_2 \ + 2e_3$$

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) Donner la matrice de f relativement à $\mathcal{B}_c$
2) Calculer l'image $f(v)$pour un vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$
3) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_{2,} v_3)$ est une base de$\mathbb{R}^3$
4) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$à $\mathcal{B}$. Donner P.
5) Calculer $-2v_1 + 6v_2 + v_3$
6) Exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de $v_1, v_{2,} v_3$.
7) En déduire l'inverse de P.
8) Déterminer la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$.
9) Déterminer le noyau de l'image de f.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que le polynôme caractéristique de A est$P_A(X) = (X - 1)^2(2 - X)$
2) Déterminer les valeurs propres de A.
3) Pour chaque valeur propre se A determiner le sous-espace propre cerrespondant.
4) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
5) Déterminer P tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
6) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Corrigés : Contrôle 2 Algèbre 2 SMP, SMA, SMC - 2008/2009

Exercice 1

$\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$la base canonique de $\mathbb{R}^3$
$f$est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$(cas particulier d'une application linéaire

$$f(e_1) = e_1 + e_3, f(e_2) = e_{1+}e_2 , f(e_3) = -2e_2 + 2e_3$$

1) La matrice relative à$\mathcal{B}_c$ de f : $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_c)$

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Pour $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ on a $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$

Alors $f(v) = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\, f(e_1) + y\, f(e_2) + zf(e_3)$

$$= x(e_1 + e_3) + y(e_{1+}e_2) + z(-2e_2 + 2e_3)$$
$$= (x + y)e_1 + (y - 2z)e_2 + (x + 2z)e_3$$
$$= (x + y, y - 2z, x + 2z)$$

Donc, $f(x, y, z) = (x + y, y - 2z, x + 2z)$

3) On montre que $\mathcal{B} = (v_1, v_{2,} v_3)$ est une base de$\mathbb{R}^3$

$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$on a: $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 2\alpha \\ 2\alpha + 2\alpha - 2\gamma = 0 \\ \alpha = 2\gamma \end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

On peut calculer le déterminant de (v_1, v_2, v_3)

$$detB = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} L_2 - L_1 \longrightarrow L_2 = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(8 + 2) = -10 \neq 0$$

$$\Rightarrow La\ famille\ \mathcal{B}\ est\ libre$$

On a $dim\mathcal{B} = 3 = dim\mathbb{R}^3$, et puisque $\mathcal{B}$ est libre alors $\mathcal{B} = (v_1, v_{2,} v_3)$est une base de $\mathbb{R}^3$

4) P : La matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$:

On a $v_1 = (-2,2,1) = -2e_1 + 2e_2 + e_3$

$$v_2 = (1,1,0) = e_1 + e_2$$

$$v_3 = (0, -2,2) = -2e_1 + 2e_3$$

$$P=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}e_1\\ e_2\\ e_3\end{matrix}$$

5) $-2v_1+6v_2+v_3=-2\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+6\\-4+6-2\\-2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$
$=10e_1$

6) $-2v_1+6v_2+v_3=10e_1\Rightarrow e_1=-\frac{1}{5}v_1+\frac{3}{5}v_2+\frac{1}{10}v_3$

Or $v_2=e_1+e_2\Rightarrow e_2=v_2-e_1=\frac{1}{5}v_1+\left(-\frac{3}{5}+1\right)v_2-\frac{1}{10}v_3=\frac{1}{5}v_1+\frac{2}{5}v_2+\frac{2}{5}v_3$

7) P^{-1} l'inverse de P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_c$

$$e_1=\frac{-1}{5}v_1+\frac{3}{5}v_2+\frac{1}{10}v_3$$
On a $e_2=\frac{1}{5}v_1+\frac{2}{5}v_2-\frac{1}{10}v_3$
$$e_3=\frac{1}{5}v_1+\frac{2}{5}v_2+\frac{2}{5}v_3$$

Alors $P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}$

8) La matrice de f relativement à $\mathcal{BM}(f,\mathcal{B})$

On peut la calculer par deux méthodes

- $\mathcal{M}(f,\mathcal{B})=P^{-1}\mathcal{M}(f,\mathcal{B}_c)P$
- $f(v_1)=f\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ car on a deja montrer que $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\y-2z\\x+2z\end{pmatrix}$

$$f(v_2)=f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1\\1-2\times 0\\1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=2e_1+e_2+e_3$$
$$=2\left(-\frac{1}{5}v_1+\frac{3}{5}v_2+\frac{1}{10}v_3\right)+\frac{1}{5}v_1+\frac{2}{5}v_2-\frac{1}{10}v_3+\frac{1}{5}v_1+\frac{2}{5}v_2+\frac{2}{5}v_3$$
$$=0.v_1+2v_2+\frac{3}{5}v_3$$
$$f(v_3)=f\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$$
$$=-2\left(\frac{1}{5}v_1+\frac{3}{5}v_2+\frac{v_3}{10}\right)+2\left(\frac{1}{5}v_1+\frac{2}{5}v_2-\frac{v_3}{10}\right)+4\left(\frac{1}{5}v_1+\frac{2}{5}v_2+\frac{2}{5}v_3\right)$$
$$=\frac{8}{5}v_1+\frac{6}{5}v_2+\frac{1}{10}v_3$$

Alors $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 2 & \frac{6}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & 3 & ½ \end{pmatrix}$

Le noyau de f

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y = 0, y - 2z = 0, x + 2z = 0\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y = -2z\}$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \left(x, -x, -\frac{1}{2}x\right)\right\}$$
$$= vect\left\{\left(1, -1, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$= vect\{u\}$ (Avec $u = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$)

$$\dim \ker f = 1$$

L'image de f :

$$Im\ f = \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (x',y',z') \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x \\ y - 2z = y' \\ x + 2z = z' \end{cases}$$
$$\Longrightarrow x' + z' = x'$$
$$\Longrightarrow z' = 0$$
$$\Longrightarrow Im\ f = \{(x',y',0) \in \mathbb{R}^3 x', y' \in \mathbb{R}\}$$
$$= vect\{(1,1,0), (0,1,0)\}$$
$$= vect\{e_1, e_2\}$$

Et puisque (e_1, e_2) est libre alorsdim $Imf = 2$.

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) On a $P_A(X) = \det(A - XI_3)$

$$= \begin{vmatrix} 3 - X & 0 & -1 \\ 0 & 1 - X & 0 \\ 2 & 0 & -X \end{vmatrix}$$
$$= (1 - X)\begin{vmatrix} 3 - X & -1 \\ 2 & -X \end{vmatrix}$$
$$= (1 - X)(-X(3 - X) + 2)$$
$$= (1 - X)(X^2 - 3X + 2)$$
$$= (1 - X)(1 - X)(2 - X)$$
$$= (1 - X)^2(2 - X)$$

2) Les valeurs propres de A

On a $P_A(X) = (1-X)^2(2-X) = 0$

Alors 1 est une valeur propre double de A

2 est une valeur propre simple de A

3) -Pour $\lambda_1 = 1$

Soit $\mathcal{B}_c(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 : AV = 1.V\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

$$= \left\{\begin{cases} 3x - z = x \\ y = y \\ 2x = z \end{cases} : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

$$= \{(x, y, 2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1{,}0{,}1) + y(0{,}1{,}0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= vect\{(1{,}0{,}2), (0{,}1{,}0)\}$$

$$= vect\{v_1, v_2\} (\text{avec } v_1 = (1{,}0{,}2) et\ v_2 = (0{,}1{,}0))$$

-Pour $\lambda_2 = 2$

$$E_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : AV = 2V\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - z = 2x \Rightarrow x = 0 \\ y = 2y \Rightarrow y = 0 \\ 2x = 2z \Rightarrow z = x \end{cases}$$

$$E_2 = \{x = z, y = 0 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$= vect\{(1{,}0{,}1)\}$$

$$= vect\{v_3\} \ (\text{avec } v_3 = (1{,}0{,}1))$$

4) On a $dimE_1 = 2 =$ le nombre de multiplicité de la valeur propre 1

et $dimE_2 = 1 =$ le nombre de multiplicité de la valeur propre 2

$$dimE_1 + dimE_2 = 2 + 1 = 3 = dim\mathbb{R}^3$$

Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

5) La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est libre et $dim\mathcal{B} = 3$, donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Donc il existe une matrice P: la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$ telle que $D = P^{-1}AP$ (P est une matrice inversible et son inverse P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On a $\begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_3 \\ v_2 = e_2 \\ v_3 = e_1 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 - 2e_3 \\ e_2 = v_2 \\ e_3 = v_3 - e_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = -v_1 + 2v_3 \\ e_2 = v_2 \\ e_3 = v_1 - v_3 \end{cases}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6) On a $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$ $\quad et \quad$ $A^2 = PDP^{-1}.PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$

On montre que $\mathrm{A}^n = PD^nP^{-1}$ $\qquad$ $On\ a \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & 0 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

Contrôle Rattrapage Algèbre 2 SMP-SMA-SMC 2008 /2009

Exercice 2 :

Soit f l' endomorphisme de $R_2[X]$ donné par $f(P) = P'$. Calculer la matrice de f relativement a la base $B = (1, (X-2), (X-2)^2)$.

Exercice 3 :

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A .
2) La matrice A est – elle inversible ?

Exercice 4 :

Soi la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A
2) Montrer que les réels $\alpha_1 = 2,\quad \alpha_2 = -2 \quad \alpha_3 = -1$ sont les valeurs propres de A
3) Pour chaque valeur propre, déterminer le sous – espace propre correspondant.
4) Montrer que la matrice A est diagonalisable.
5) Déterminer P tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
6) Calculer A^n pour un entier $n \in N$.

Corrigés Contrôle Rattrapage Algèbre 2 SMP,SMA,SMC 2008 /2009

Exercice 2 :

F L'endomorphisme de $R_2[X]$: $f(P) = P'$
Soit la base $B = (1, (x-2), (x-2)^2)$
On détermine la matrice $M(f, B)$ de f dans la base B
On $F(1) = 0$
$F((x-2) = 1$ $\quad ((x-2)' = 1)$
$F((x-2)^2) = 2(x-2)$ $\quad ((x-2)' = 2(x-2))$

$$Alors \ : \ M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$P_A(x) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -1 \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix}^{C1-C3} = \begin{vmatrix} -X & 0 & -1 \\ 0 & -X & 1 \\ -X & 1 & -(1+X) \end{vmatrix}^{L1_L3}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & X \\ 0 & -X & 1 \\ -X & 1 & -(1+X) \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -1 & X \\ -X & 1 \end{vmatrix}$$

$= -X(-1+X^2) = -X(X-1)(X+1)$
2°) – la matrice A n'est pas inversible. Car 0 est une valeur propre de A en effet : A est diagonalisable on peut former une base B' tel que

$$A = P^{-1}DP \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $det(D) = 0$ et puis que les deux matrice sont semblable donc $det\ A = det\ D = 0$

D'on A n'est pas inversible.

$$A\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

1°)- le polynôme caractéristique de A.

$$P_A(X) = \det(A-XI_3) = \begin{vmatrix}-X & 1 & 0\\ 1 & -X & -3\\ 1 & 1 & -1-X\end{vmatrix}^{C1-C2} = \begin{vmatrix}-(X-1) & 1 & 0\\ X+1 & -X & 3\\ 0 & 1 & -(1+X)\end{vmatrix}^{L1+}$$

$$= \begin{vmatrix}0 & 1-X & 3\\ X+1 & -X & 3\\ 0 & 1 & -(X+1)\end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix}1-X & 3\\ 1 & -(1+X)\end{vmatrix} = (X+1)(X^2-1-3)$$

$= (X-1)(X^2-4) = (X+1)(X+2)(X-2) = 0$

$P_A(X) = (X+1)(X+2)(x-2) = 0$

3°)- on a $P_A(X) = (X+1)(X+2)(x-2) = 0$

Alors les valeurs propre de A sont : $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=-1$

4°)- la matrice A possède 3 valeurs propre simple donc elle est diagonalisable sur ℝ car les valeurs propret sont simple $\epsilon\mathbb{R}$.

5°)- pour $\lambda_1=2$ soit B_c (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On a $E_2= \{AV = 2V / V\epsilon\mathbb{R}^3\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ x+3z=2y\\ x+y-z=2z\end{cases}$ z = x et 2 = x

$E_2=\{x=z=\frac{1}{2}y / x,y,z\epsilon\mathbb{R}^3\} = \{(x,\frac{1}{2}x,z):/x \epsilon \mathbb{R}\}=\text{vect}\{(2,1,2)\}=\text{vect}\{V_1\}$ avec $V_1=(2,1,2)$.

$E_2= \{AV = -2V / V \epsilon\mathbb{R}^3\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}= -2\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2x\\ x+3z=-2y\\ x+y-z=-2z\end{cases}$ z = x

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-2x\\ x+3z+2y=0\\ x+y+z=0\end{cases}$ y =-2 x et y = - 2z $\Rightarrow$ x = z = -1/2y

E2 $\{(2y,-y,2y)/y\epsilon\mathbb{R}\}=\text{vect}\{2,-1,2)\} \Rightarrow v_2(2,-1,2)$

$E_{-1} = \{AV = -V / V\epsilon\mathbb{R}^3\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}= -\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x+3z=-y \\ x+y-z=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x+3z+y=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{x=-y et z=0}$$

E_{-1} {(x,x ,0)/x$\epsilon\mathbb{R}$}=vect {1,-1,0)} ⇒ $v_3(1,-1,0)$

Alors $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\begin{cases} V1 = 2e1 + e2 + 2e3 \\ V2 = 2e1 - e2 + 2e3 \\ V3 = e1 - e2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e1 = V3 + e2 \\ e2 = \frac{1}{2}V1 - \frac{1}{2}V2 \\ e3 = \frac{1}{2}(V2 - 2e1 + e2) \end{cases}$

$e_3 = \frac{1}{2}(V_2 - V_1 + V_2 - 2V_3 + \frac{1}{2}V - -\frac{1}{2}V_2)$

$= \frac{1}{2}(-\frac{3}{2}V_1 + \frac{3}{2}V_2 - 2V_3) = -\frac{3}{4}V_1 + \frac{3}{2}\ V_2 - V_3$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6°)- on a $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Leftrightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

On a $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \forall\ n\ \epsilon\mathbb{N}$

$$D^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & O & O \\ 0 & (-2)^n & O \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2^{n+1} & (2)^{n-1} & (-1)^n \\ 2^n & (-2)^n & -(-2)^n \\ (2)^{n+1} & (-2)^{n-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & _3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2^{n+2} + (-2)^n + 4(-1)^n & 2^{n+1} + (-2)^n & -3.2^{n+1} + 3(-2)^{n-1} - 4(-1)^n \\ 2^{n+2} + (-2)^n + 4(-1)^n & 2^{n+1} - (-2)^{n+1} & -3.2^n - 3(-2)^n + 4(-2)^n \\ 2^{n+2} + (-2)^n & 2^{n+2} + (-2)^n & -3.2^{n+1} + 3(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Extrait de Contrôle 2 Algèbre 2 SMP- SMC - SMA -2005/2006

Exercice I :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) Jordaniser la matrice A sur IR
2) On considère le système différentiel homogène suivant :

$$(S_h)\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ y_3' = 2y_1 - y_3 \end{cases}$$

   a) Résoudre le système (S_h).
   b) Trouver un système fondamental de solutions de (S_h).
3) Résoudre le système différentiel suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ y_3' = 2y_1 - y_3 \end{cases}$$

Corrigés de L'Extrait de Contrôle 2 Algèbre 2 SMP- SMC - SMA -2005/2006

Exercice I :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1°) – on détermine les valeurs propre de A.

On a $P_A(X) = det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ 1 & 2-X & -2 \\ 2 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 3-X & -2 \\ 2 & -(1+X) \end{vmatrix}$

$$=(2-X)\big((1+X)(X-3)+4\big) = (2-X)(X^2-2X+1) = (2-X)(X-1)^2$$

Alors A a pour des valeurs propres :

1 valeur propre d'ordre double

2 valeur propre d'ordre simple

Soit la base canonique $B_C = (e_1, e_2, e_3)$ de IR^3

$$E_1 = \left\{A\,V = \tfrac{1V}{V} \in IR^3\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2z = x \\ x + 2y - 2z = y \\ 2x - z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$E_1 = \{x = y + z \,/\, (x, y, z) \in IR^3\} = vect\{(1,1,1)\} = vect\{V_1\}$$

On a $dimE_1 = 1 \neq$ au nombre de multiplicité de la valeur propre 1

⇨ A n'est pas diagonalisable on peut trianguler

$$E_2 = \{A.V = 2.V \,/\, V \in IR^3\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2z = 2x \\ x + 2y - 2z = 2y \\ 2x - z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ z = x = 0 \end{cases}$$

$$E_2 = \{(0, y, 0), y \in IR\} = vect\{V_2\} = vect\{(0,1,0)\}$$

On choisit un vecteur V_3 tel que $B = (V_1, V_2, V_3)$ soit $det(V_1, V_2, V_3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$V_3 = (0,0,1)$donc on peut former une base $B = (V_1, V_3, V_2)$

Tel que $T = P^{-1}AP$

T : est la matrice triangulaire

P : la matrice de passage de la base $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ a la base $B = (V_1, V_3, V_2)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $\begin{cases} V_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ V_3 = e_3 \\ V_2 = e_2 \end{cases}$ $\Rightarrow e_1 = V_1 - V_3 + V_2$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2°)

$(S_h)\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ y_3' = 2y_1 - y_3 \end{cases}$ On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A\,Y \Leftrightarrow Y' = AY$$

On a $T = P^{-1}AP \Rightarrow Y' = AY \Leftrightarrow Z' = (P^{-1}AP)Z$ avec $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ et $Z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix}$

$$Z' = (P^{-1}AP)Z \Leftrightarrow Z' = TZ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = z_1 - 2z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = z_1 - 2C_1 \\ z_2' = C_1 \\ z_3' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (z_1 - 2C_1)'$$
$$= z_1 - 2C_1 = C_3e^t$$

Alors $\begin{cases} z_1 = C_3e^t - 2C_1 \\ z_2 = C_1 \\ z_3 = 0 \end{cases}$ $Z' = TZ \Leftrightarrow Y = PZ \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases} y_1(t) = z_1 = C_3e^t + 2C_1 \\ y_2(t) = z_1 + z_3 = C_3e^t + 2C_1 \\ y_3(t) = z_1 + z_2 = C_3e^t + C_1(2+1) = C_3e^t + 3C_1 = C_3e^t + C_4 \end{cases}$ et on pose $C_4 = 3C_1$

Contrôle 2 Algèbre2 SMP-SMA-SMC - 2006/2007

Exercice I :

Soit la matrice A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1)
a) Déterminer les valeurs propres de A et les sous espaces propres associés.
b) En deduire que A diagonalisable sur R et diagoniliserA .
c) Calculer $(A)^n$ pour tout n≥1.

2) On considère les suites $(x_n),(y_n)et\ (z_n)$ definies par leurs termes initiaux $x_0 = 1, y_0 = 0etz_0 = 1$et par les relations de récurence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + z_n \\ y_{n+1} = 2y_n \quad \forall n \in N \\ z_{n+1} = x_n + 2z_n \end{cases}$$

Calculer $x_n, y_n etz_n$ en fonction de n ;pour tout n≥1.

3)
a) Montre que A vérifié la relation suivante :

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0$$

b) Donner l'expression de A^{-1} en fonction de $A^2, AetI_3$

4) Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y'_1(t) = 2y_1 + y_3 \\ y'_2(t) = 2y_2 \\ y'_3(t) = y_1 + 2y_3 \end{cases}$$

Corrigés de Contrôle 2 Algèbre2 SMP-SMA-SMC - 2006/2007

Exercice I :

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

1)

a) Les valeurs propres de A

On a $P_A(X) = det(A - XI_3) = \begin{vmatrix}2-X & 0 & 1\\ 0 & 2-X & 0\\ 1 & 0 & 2-X\end{vmatrix} = (A - 2X)\begin{vmatrix}2-X & 1\\ 1 & 2-X\end{vmatrix}$

$= (2 - X)((2 - X)^2 - 1) = (3 - X)(2 - X)(1 - X)$

$P_A(X) = 0$alors les valeurs propres de A sont :

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 et \lambda_3 = 1$

Les ss-espaces propres associés aux valeurs propres sont :

✓ E_1={AV =V / VϵR^3} $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x + z = x\\ 2y = y\\ x + 2z = z\end{cases} \Leftrightarrow y = 0 et x = -z$

E_1 = {(x,0,-x)/xϵR} = vect{(1,0,-1)} = vect{V_1} avec V_1 =(1,0,-1)

✓ E_2={AV=2V / VϵR^3} $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x + z = 2x\\ 2y = 2y\\ x + 2z = 2z\end{cases} \Leftrightarrow x = 0 et z = 0$

E_2= {(0,y,0)/yϵR} = vect{(0,1,0)} = vect{V_2} avec V_2=(0,1,0)

✓ E_3={AV =3V / VϵR^3} $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x + z = 3x\\ 2y = 3y\\ x + 2z = 3z\end{cases} \Leftrightarrow y = 0 et x = z$

$E_3 = \{(x,0,x)/x\epsilon\mathbb{R}\} = vect\{(1,0,1)\} = vect\{V_3\}$ avec V_3 =(1,0,1)

b) A est diagonalisable car tous les valeurs propres de F sont simple ϵR

On a P=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

P est la matrice de passage de la base canonique à la base B=(V_1, V_2, V_3)

B est une base alors P admet un inverse P^{-1}

P^{-1}est la matrice de passage de la base B à Bc

On a : $\begin{cases} V_1 = e_1 - e_3 \\ V_2 = e_2 \\ V_3 = e_1 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_3 \\ e_2 = V_2 \\ e_3 = -\frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_3 \end{cases}$ et par suite : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

et $D^{-1} = P^{-1}AP$

c)

on a : $D^{-1} = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Leftrightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ -1 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+3^n & 0 & 3^n - 1 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 3^n - 1 & 0 & 1+3^n \end{pmatrix}$$

2) – on a

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2\,x_n + z_n \\ y_{n+1} = 2y_n \quad \forall n \in N \\ z_{n+1} = x_n + 2z_n \end{cases}$$

On pose : $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ $\quad alors : U_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$

$alors : U_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = AU_n$

Donc : $U_{n+1} = AU_n$

$on\ a :$ $U_1 = AU_0$
$U_2 = A.\,AU_0 = A^2U_0$
$U_3 = A.\,A^2U_0 = A^3U_0$
$U_n = A^nU_0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3^n & 0 & 3^n - 1 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 3^n - 1 & 0 & 1+3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \forall n \in N ; \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = (1+3^n)x_0 + (3^n - 1)z_0 = 2.3^n \\ y_n = 2^{n+1}y_0 = 0 \\ z_n = (3^{n-1})x_0 + (3^n + 1)z_0 = 4.3^{n+1} \end{cases} ; \forall n \in N \Rightarrow \begin{cases} x_n = 2.3^n \\ y_n = 0 \\ z_n = 4.3^{n+1} \end{cases} ; \forall n \in N$$

3)

a) -

On a : $P_A(X)$ =(3-X)(2-X)(1-X) = 0

= $-X^3+6X^2-11X^1+6 = 0$

On a donc : $P_A(A) = 0$

Alors :

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0$$

b) L'expression de A^{-1} en fonction de $A^2, A\ et\ I_3$:

On a : $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0$
Alors : $A(A^2 - 6A + 11I_3) = 6I_3$
Donc : $A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I_3)$

4)
on a :

$$\begin{cases} y'_1(t) = 2\,y_1 + y_3 \\ y'_2(t) = 2y_2 \\ y'_3(t) = y_1 + 2y_3 \end{cases}$$

On pose :

$$Y = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y' = \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ y'_3(t) \end{pmatrix}$$

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A\,Y \Leftrightarrow \qquad Y' = A\,Y$$

$$\Leftrightarrow Z' = P^{-1}APZ \quad \Leftrightarrow Z' = DZ \ \ tq : Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$Z' = DZ \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z'_1 = 2\,z_1 \\ z'_2 = 2z_2 \\ z'_3 = 3z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = C_1 e^t \\ z_2 = C_2 e^{2t} \\ z_3 = C_3 e^{3t} \end{cases} \Leftrightarrow Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 = C_1 e^t + C_3 e^{3t} \\ y_2 = z_2 = C_2 e^{2t} \\ y_3 = -z_1 + z_3 = C_3 e^{3t} - C_1 e^t \end{cases}$$

TD de l'algèbre diagonalisation des matrices carrées

Exercice 1 :

Les matrices sont-elles diagonalisables ?

(Préciser si c'est dans R ou dans C)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Soit le $\mathcal{R}$-espace vectoriel $\mathcal{R}_2[X] = \{P \in R[X] : \deg P \leq 2\}$ $muni$ de sa base canonique B=(1,X,X^2).

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{R}_2[X]$ $définie$ par :

$$f(P) = P' + P \qquad \forall\, P \in \mathcal{R}[X]$$

Où P' est le polynôme dérivé de P.

1) Déterminer la matrice de f relativement à la base B.
2) f est-il diagonalisable sur $\mathcal{R}$? Justifier votre réponse.

Exercice 3 :

*Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.
2) a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathcal{R}$.
   b) Déterminer une matrice inversible P∈ $M_3(R)$ telle que P^{-1}AP soit diagonale.

Exercice 4 :

Soit la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m+1 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ où m∈ $\mathcal{R}$

1) Déterminer les valeurs propres de $A_m$et les sous-espaces propres associés.
2) a) Montrer que A_m est diagonalisable sur R.
   b) Déterminer une matrice inversible P ∈ $M_3(\mathcal{R})$ telle que $P^{-1}A_m$P soit diagonale.
3) Calculer $(A_{-2})^n$ pour tout n∈ N^*

4) Soient les suites réelles (x_n) , (y_n) et (z_n) définies par les relations :

$$\begin{cases} x_{n+1=} -2y_n \\ y_{n+1=} -2y_n \qquad \forall\, n \in N \\ z_{n+1=} x_n - y_n - z_n \end{cases}$$

Avec : $x_0 = 1$,$y_0 = 1$ et $z_0 = -1$.

On note U_n=$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout n ∈ N.

a) Montrer que : $U_n = (A_{-2})^n U_0 \qquad \forall\, n \in N^*$

b) En déduirex_n, y_n ,z_n en fonction de n.

Exercice 5 :

Soit la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$où $\alpha \in \mathcal{R}$.

1) Déterminer les valeurs propres de A_α et leurs ordres de multiplicité.
2) a) Pour quelle valeur de , la matrice $A_\alpha$et diagonalisable ? Justifier votre réponse.
   b) Dans ce cas diagonaliser A_α et calculer $(A_\alpha)^n$ pout tout n ≥ 1.

Corrigés TD de l'algèbre diagonalisation des matrices carrées

Exercice 1:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on détermine le polynôme caractéristique de la

matrice A . $P_x(A)$ = det (A - XI_3) = 0

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ -1 & 0 & -X \end{vmatrix}$ = (1-X)$\begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix}$ = (1-X)(X^2+1) = 0$\Longrightarrow$ a $\lambda_1 = 1$

- A possède une valeur propre 1 simple dans $\mathcal{R}$ $\Longrightarrow$A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{R}$ car le sous espace de la valeur propre 1 est de dim E_1= 1 on peut pas crée une base propre de R^3.

- A possède 3 valeurs propre simple dans $\mathbb{C}$ (1 , i , -i) .

$\Longrightarrow$ A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ à chaque valeur propre on a une vecteur propre crée une base B (v_1, v_2, v_3) tel que : D= P^{-1}A P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

P : la matrice de passage de la base canonique $B_c(e_1, e_2, e_3)$ à la base B.

P^{-1}: : la matrice de passage de B à B_c .

$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ on détermine le polynôme caractéristique de la matrice B .

$P_x(B)$ = det (B - XI_3) = 0

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 1 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 1 & 2 & 2-X \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 = \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 1 \\ 0 & 1-X & -(1-X) \\ 1 & 2 & 2-X \end{vmatrix} C_3 \leftarrow C_3 + C_2$

= $\begin{vmatrix} 2-X & 2 & 3 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 2 & 4-X \end{vmatrix}$ = (1-X) $\begin{vmatrix} 2-X & 3 \\ 1 & 4-X \end{vmatrix} = (1-X)((2-X)(4-X)-3)$

$P_B(X)$ = (1-X)(X^2 −6X + 5) = (1-X)(X-1)(X-5)

B à :

- 1 racine double (λ_1)
- 5 racine simple (λ_2)

tout les racines ∈ $\mathcal{R}$ on peut diagonaliser B dans $\mathcal{R}$.

soit la base canonique $B_c(e_1, e_2, e_3)$ dans $\mathcal{R}^3$

- $\lambda_1 = 1$

E_{λ_1}= $\{V_1 \in E$ / A V_1 = V_1 } ⟺ $\begin{cases} 2x+2y+z=x \\ x+3y+z=y \\ x+2y+2z=z \end{cases}$ ⟺ $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

⟺ x = - (2y+z)

E_{λ_1} ={ (x,y,z) ∈ $\mathcal{R}^3$ / x = - 2y – z } = {(-2y –z , y , z) / y,z) ∈ $\mathcal{R}^2$}
={ y (-2,1,0) + z (-1,0,1) / z,y) ∈ $\mathcal{R}^2$ }
= vect { (-2,1,0) , (-1,0,1) }

dimE_1= 2 = ordre de la valeur propre 1 ⟹ B est diagonalisble sur $\mathcal{R}$.

E_{λ_2}= E_5 = { V_3 ∈ $\mathcal{R}^3$ / A V_3= 5 V_3 } ⟺ $\begin{cases} 2x+2y+z=5x \\ x+3y+z=5y \\ x+2y+2z=5z \end{cases}$

⟺ $\begin{cases} 2x+z=3x \\ x+z=2y \\ x+2y=3 \end{cases}$ ⟺ $\begin{cases} x=z \\ x+z=2y \end{cases}$ ⟺ x = y = z

E_5 = vect { (1,1,1) } ; dim E_5= 1

soit B (V_1, V_2, V_3) une base de $\mathcal{R}^3$

la matrice de passage de B_c à B est P = $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc : D= P^{-1}B P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

$\mathcal{R}_2$[x]= { P∈ $\mathcal{R}$[x] : deg P ≤ 2 } dans la base B=(1,X,X^2)
f est une endomorphisme de $\mathcal{R}_2$[x] (cas particulier d'une application linéaire).

f(P)= P' + P $\forall\, P \in \mathcal{R}_2$[x]

1) La matrice de f dans la base canonique B , M(f,B)

$$f(1) = (1)' + 1 = 1$$

$$f(X) = (X)' + X = 1 + X \qquad f(X^2) = (X^2)' + X^2 = 2X + X^2$$

$$\Leftrightarrow M(f,B) = \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}$$

2) On détermine la polynôme caractéristique de M(f,B)

$P_x(M)$ = det (M - XI_3) = $\begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 0 & 1-X & 2 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$ = (1-X))$\begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix}$

= $(1-X)^3$ = 0

M(f,B) a une valeur propre 1 triple .

Soient B la base canonique de $\mathcal{R}^3 B(e_1,e_2,e_3)$ et B' une base de $\mathcal{R}^3$B'(v_1,v_2,v_3) .

On a E_1 = { MV = 1 V / V$(x,y,z) \in \mathcal{R}^3$}

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=x \\ y+2z=y \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=z=0$$

E_1 = Vect{V_1} = Vect {(1,0,0)}

dim E_1 = 1 < à L'ordre de la valeur propre.

$\Longrightarrow M(f,B)$n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) – Les valeurs propres de A :

On détermine $P_x(A)$ = det (A - XI_3) = 0

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2-x & 1 & -1 \\ -4 & 2-x & -2 \\ 2 & -1 & 1-x \end{vmatrix} C_2 \leftarrow C_2 + C_3 = \begin{vmatrix} -2-x & 0 & -1 \\ -4 & -x & -2 \\ 2 & -x & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \begin{vmatrix} -2-x & 0 & -1 \\ -6 & 0 & x-3 \\ 2 & -x & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= x. \begin{vmatrix} -(2+x) & -1 \\ -6 & x-3 \end{vmatrix} = x.(-(2+x)(x-3)-6) = X^2(1-X)$$

Donc on a :

- $\lambda_1 = 0$ valeur propre double de A
- $\lambda_2 = 1$ valeur propre simple de A

On considère la base canonique $B_c(e_1, e_2, e_3)$ de R^3

$E_{\lambda 1} = \{A.v = 0.v \,/ v \in R^3\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -4x + 2y - 2z = 0 \; \forall (x,y,z) \in R^3 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$= \{(x,y,z) \in R^3 / y = 2x + z\} = \{(x, 2x + z, z) / x, y \in R^2\}$$

$= \text{Vect}\{V_1, V_2\} = Vect\{(1,2,0), (0,1,1)\}$; (V_1, V_2) sont libres.

$E_{\lambda 2} = \{A.v_3 = 1.v_3 / v_3(x,y,z) \in R^3\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = x \\ -4x + 2y - 2z = y \\ 2x - y + z = z \end{cases} (x,y,z) \in R^3 \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 3x \\ -4x + y - 2z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} (x,y,z) \in R^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 2x \\ z = y - 3x = -x \end{cases} (x,y,z) \in R^3$$

$E_{\lambda 2} = \{x = -z \; et \; y = 2x / (x,y,z) \in R^3\}$

$= \text{Vect}\{V_3\} = Vect\{(1,2,-1)\}$.

On a dimλ_1= 2 = l’ordre de multiplicité de λ_1, et dim λ_2 = 1 = l’ordre de multiplicité de λ_2.

Donc A est diagonalisable sur R.

2) b)- Soit la base B'(V_1, V_2, V_3) tel que$V_1(1,2,0), V_2(0,1,1) et\ V_3(1,2,-1)$.
La matrice de passage de la base B_c à la base B' est P :

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$et on a B' une base de R^3→ det P ≠ 0, donc P est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice de passage de la base B' à la base B_c.

D'où :

D = $P^{-1}AP$ = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

$A_m = \begin{pmatrix} m+1 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ou m∈ $\mathcal{R}$

1) Les valeurs propre de A_m :

On a :$P_x(A_m)$ = det (A_m - XI_3) = 0

= $\begin{vmatrix} m+2-X & -2 & 0 \\ 0 & m-X & 0 \\ 1 & -1 & m+1-X \end{vmatrix}$ = (m+1-X))$\begin{vmatrix} m+2-X & -2 \\ 0 & m-X \end{vmatrix}$

= (m-X)(m+1-X)(m+2-X)

Donc :

- $\lambda_1 = m$ valeur propre simple
- λ_2 = m+1 valeur propre simple
- λ_3 = m+2 valeur propre simple

Les sous espaces propre de A :

On considère la base canonique $B_c(e_1, e_2, e_3)$ dans $\mathcal{R}^3$

- $E_{\lambda_1} = E_m$ = { AV_1 = mV_1 / V_1 (x,y,z) ∈ $\mathcal{R}^3$ }

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = mx \\ my = my \\ x - y + (m+1)z = m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$x=y et y=0 $\quad\quad \forall\, x, y \in \mathcal{R}^2 \Leftrightarrow E_m = \{(x, x, 0) \setminus x \in \mathcal{R}\}$

E_m = Vect { V_1 } = Vect {(1,0,0)}

- $E_{\lambda_2} = E_{m+1}$ = { AV_2 = (m+1)V_2 / $V_2 \in \mathcal{R}^3$ }

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m+2 & -1 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (m+1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = (m+1)x \\ my = (m+1)y \\ x - y + (m+1)z = (m+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \forall\, x, y \in \mathcal{R}^2 \Leftrightarrow E_{m+1} = \{(x, 0, x) \setminus x \in \mathcal{R}\}$$

E_{m+1} = Vect { V_2 } = Vect {(1,0,1)}

- $E_{\lambda_3} = E_{m+2}$ = { AV_3 = (m+2)V_3 / $V_3 \in \mathcal{R}^3$ }

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (m+2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = (m+2)x \\ my = (m+2)y \\ x - y + (m+1)z = (m+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = y = 0 \\ z \end{cases} \Leftrightarrow E_{m+2} = \{(0, 0, z) \setminus z \in \mathcal{R}\}$$

= Vect { V_3 } = Vect {(0,0,1) }

2) a)

$A_m$possède 3 valeurs propre simple $\in \mathcal{R}$

Et on a à chaque valeur propre une vecteur propre associé à cette valeur.
Donc A_m est Diagonalisable sur $\mathcal{R}$.
b)
soit la base B' (v_1, v_2, v_3) ; $v_1(1,1,0)$, $v_2(1,0,1)$ et $v_3(0,0,1)$

P : la matrice de passage de la base de B_c à la base B'

P= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a B' est une base de $\mathcal{R}^3 \Longrightarrow$ dest P $\neq 0$

Donc il existe P^{-1} l'inverse de P .

P^{-1}est la matrice de passage de la base B' à la base B_c

D'où : $D_m = P^{-1}A_m$ P = $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$

3)

On a $D_m = P^{-1}A_m$ P $\Leftrightarrow$ A_m = P D_mP^{-1}

$(A_m)^n$ = (P $D_mP^{-1})^n$ = P$(D_m)^nP^{-1}$

Pour m = -2 on a : $(A_{-2})^n$ = P$(D_{-2})^nP^{-1}$

On détermine P^{-1} la matrice de passage de la base B' à la base B_c

On a : $\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 \\ v_2 = e_1 + e_3 \\ v_3 = e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = v_2 - e_3 = v_2 - v_3 \\ e_2 = e_1 + e_3 = v_2 \\ e_3 = v_3 \end{cases}$

Donc : $P^{-1} = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$ $(D_{-2})^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n & 0 \\ (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-2)^n - (-1)^n & 0 \\ (-0)^n & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \forall\, n \in N^*$

4) $(x_n), (y_n)$, (z_n) sont des suites réelles.

$\begin{cases} x_{n+1} = -2y_n \\ y_{n+1} = -2y_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n - z_n \end{cases} \forall\, n \in N$ Avec : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \\ z_{0=} - 1 \end{cases}$

$U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$; $\forall\, n \in N$

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A_{-2}U_n$$

$U_{n+1} = A_{-2}U_n \forall\, n \in N$

On a :

$U_1 = A_{-2}U_0$

$U_2 = A_{-2}U_1 = A_{-2}A_{-2}U_0 = (A-2)^2U_0$

$U_3 = A_{-2}U_2 = A_{-2}(A-2)^2U_0 = (A-2)^3U_0$

..

$U_n = (A-2)^nU_0 \forall\, n \in N^*$

On peut démontrer par récurrence.

b) On a $U_n = (A-2)^2U_0$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-2)^n - (-1)^n & 0 \\ (-0)^n & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ avec : } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n = (-1)^n x_0 + ((-2)^n - (-1)^n)y_0 = (-2)^n \\ y_n = (-2)^n x_0 = (-2)^n \\ z_{n+1} = (-1)^n y_0 = (-1)^{n+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n = (-2)^n \\ y_n = (-2)^n \ \forall\, n \in N^* \\ z_n(-1)^{n+1} \end{cases}$$

Exercice 5 :

$$A\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \alpha \in \mathcal{R}$$

1) On détermine $P_x(A\alpha)$ = det ($A\alpha$ - XI_3) = 0.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-x & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ -1 & 1-x & -1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} L_3 \leftarrow L_2 - L_3 = \begin{vmatrix} 1-x & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ -1 & 1-x & -1 \\ 0 & 1-x & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ -1 & 1-x & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} c2 \leftarrow c2 - c3$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 0 & \alpha-1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-x)(1-x)\begin{vmatrix} 1-x & \alpha-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-x)^2(2-x)$$

Donc les valeurs de Aα sont :

- λ1= 1 valeur propre double de Aα
- λ2= 2 valeur propre simple de Aα

2) a)- soit $B(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de R^3

$E_{\lambda 1} = E_1 = \{A\alpha.V = 1.V / V(x,y,z) \epsilon R^3\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + (\alpha+1)y + (\alpha-1)z = x \\ -x + y - z = y \\ x + 2z = z \end{cases} \quad (x,y,z) \epsilon R^3$$

- Si $\alpha = 1 \rightarrow \{x = -z \,; (x, y, -x)\}$

$E_{\lambda 1} = Vect\{V_1, V_2\} = Vect\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$; (V_1, V_2) sont libres.

dim$E_{\lambda 1} = 2$ = le nombre de multiplicités de 1 dans ce cas A_1 est diagonalisable.

- Si $\alpha \neq 1 \rightarrow$ x = y = -z

$E_{\lambda 1} = Vect\{V_1\} = Vect\{(1,1,-1)\}$

dim$E_{\lambda 1} \neq 1 \neq$ nombre de multiplicités de $\lambda_1 = 1$ans ce cas Aα n'est pas diagonalisable.

b) – pour $\alpha = 1$ on a :

$E_{\lambda 1} = Vect\{V_1, V_2\} = Vect\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$

$$E_{\lambda 2} = E_2 = \{AV_3 = 2V_3 \,/ V_3 \epsilon R^3\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x \\ -x + y - z = 2y \Leftrightarrow y = -z \; et \; x = 0 \\ x + 2z = 2z \end{cases}$$

$E_{\lambda 2} = E_2 = \{(0, y, -y) / y \epsilon R\}$ = vect{ V_3 } = vect {(0,1,-1)}
$B'(V_1, V_2, V_3)$est une base de R^3 car dim$E_{\lambda 1}$+ dim$E_{\lambda 2}$ = 2+1 =3 et (V_1, V_2, V_3) *sont libres.*

Donc il existe une matrice D semblable à A_1tel que D= $P^{-1}A_1$ P avec P est la matrice de passage de la base B_c à la base B' et P^{-1} est son inverse (P^{-1} est la matrice de passage de la base B' à la base B_c)

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a $\begin{cases} V_1 = e_1 - e_3 \\ V_2 = e_2 \\ V_3 = e_2 - e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = V_1 + V_2 - V_3 \\ e_2 = V_2 \\ e_3 = V_2 - V_3 \end{cases}$ $donc\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On a D= $P^{-1} A_1 P \Leftrightarrow A_1 = PDP^{-1} \Leftrightarrow (A_1)^n = (PDP^{-1})^n \Leftrightarrow PD^nP^{-1}$

On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$(A_1)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2^n \\ -1 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A_1)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 - 2^n & 1 & 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Analyse :

Contrôle 1 Analyse 2 SMP-SMC Année 2005/2006

Exercice I :

Soit φ une fonction numérique de classe C^2 sur IR^2. On considère dans $\{(x.y) \in IR^2, x \neq 0\}$ la fonction définie par $f(x,y) = x\varphi(\frac{y}{x})$.

1- Vérifier que f est homogène. Quel est son degré ?
2- Montrer que f vérifier $x^2 f''_{xx} - y^2 f''_{yy} = 0$.

Exercice II:

On considère la fonction f définie sur IR^2 par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & si (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1- Etudier la continuité de f.
2- Calculer f'_x et f'_y pour $(x,y) \neq (0,0)$.
3- Montrer que $f'_x(0,0) = 0$ et $f'_y(0,0) = 0$.
4- Est-ce que f'_x et f'_y sont continues ?
5- Est-ce que f est différentiable ?

Exercice III :

On considère la forme différentielle suivante :

$$\omega = ydx + (x^2y^2 + x)dy$$

1- Vérifier que ω n'est pas exacte.
2- Trouver un nombre réel α tel que la fonction $m(x,y) = (xy)^\alpha$ soit un facteur intégrant de ω dans $\Omega = \{(x,y) \in IR^2; x > 0 \; et \; y > 0\}$.
3- En déduire la résolution de l'équation différentielle $y + (x^2y^2 + x)y' = 0$.

Corrigés Contrôle 1 Analyse 2 SMP-SMC Année 2005/2006

Exercice I :

Soit $f(x,y) = x\varphi(\frac{y}{x}) \forall (x.y) \in IR^2, x \neq 0$

Avec φ une fonction numérique de C^2 sur IR

1- Soit $t \in$ IR on a $f(tx,ty) = tx\varphi\left(\frac{ty}{tx}\right) = t^1 x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Donc $f(tx,ty) = t^1 f(x,y)$

D'où f est homogène de degré égal à 1

2-

- $f_x' = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 1\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\frac{\partial}{\partial x}[\varphi\left(\frac{y}{x}\right)] = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\frac{-y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$

$$= \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

- $f_{xx}'' = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \frac{-y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - [\frac{-y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{-y}{x} * \frac{y}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)]$

$$= \frac{-y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y^2}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)$$

- $f_y' = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) = x\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$

$$= \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

- $f_{yy}'' = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \frac{1}{x}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)$

Donc $x^2 f_{xx}'' - y^2 f_{yy}'' = \frac{y^2}{x}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

Exercice II :

Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1- La continuité de f

Les fonctions $h: (x,y) \to h(x,y) = xy$, $g(x,y) \to g(x,y) = x^2 - y^2$

Et $K: (x,y) \to K(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ sont continues sur $IR^2 - \{(0,0)\}$

Donc f est continue sur $IR^2 - \{(0,0)\}$

- La continuité de f en (0,0)

  On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \;;\; r > 0 \\ y = r\sin\theta \;;\; \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$

Alors $f(x,y) = f(r) = \frac{r^2}{4}\sin 2\theta \cos 2\theta$

Par suite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0}(\frac{r^2}{4}\sin 2\Theta \cos 2\Theta)\forall\Theta$

D'où $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

On a alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

Donc f est continue au point (0,0).

Conclusion : f est continue sur $IR^2 - \{(0,0)\}$ et de plus f est continue au point (0,0), on déduit alors que f est continue sur IR^2.

2- Calculons $f_x'(x,y)$ et $f_y'(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

- Calcul f_x' pour $(x,y) \neq (0,0)$.

$$f_x'(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yx^3-xy^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$f_x'(x,y) = \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}(yx^3-xy^2)(x^2+y^2) - (yx^3-xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$f_x'(x,y) = \left(\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2) - (x^3y-xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$f_x'(x,y) = \left(\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

- Calcul f_y' pour $(x,y) \neq (0,0)$.

$$f_y'(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yx^3-xy^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$f_y'(x,y) = \left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}(yx^3-xy^2)(x^2+y^2) - (yx^3-xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$f_y'(x,y) = \left(\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2) - (x^3y-xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$f_y'(x,y) = \left(\frac{x^5-3x^3y^2+x^3y^2-3xy^4+2xy^4-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$f_y'(x,y) = \left(\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

3- Montrons que $f_x'(0,0) = 0$ et $f_y'(0,0) = 0$

- Calcul de $f_x'(0,0)$

$$f_x'(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0 - 0}{h} = 0$$

- Calcul de $f_y'(0,0)$

$$f_y'(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0 - 0}{k} = 0$$

4- Continuité de $f_x' et f_y'$

On a

$$f_x'(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}\right) & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Continuité de f_x'

Pour $(x,y) \neq (0,0)$

On a $h : (x,y) \to x^4y + 4x^2y^3 - y^5$ et $g : (x,y) \to (x^2+y^2)^2$ sont des fonctions continues sur $IR^2 - \{(0,0)\}$

Donc $(x,y) \to \frac{\mathrm{h}\,(\mathrm{x,y})}{\mathrm{g}:(\mathrm{x,y})}$ est continue sur $IR^2 - \{(0,0)\}$

D'où f_x' est continues sur $IR^2 - \{(0,0)\}$

Pour $(x,y) = (0,0)$

Calculons $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x'(x,y)$

Pour cela, utilisons les coordonnées polaires :

Posons $\begin{cases} x = r\cos\Theta \;\; ; \;\; r > 0 \\ y = r\sin\Theta \; ; \; \Theta \in [0,2\pi] \end{cases}$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x'(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^5cos^4\Theta\sin\Theta + 4r^5 cos^2\Theta sin^3\Theta - r^5sin^5\Theta}{(r^2cos^2\Theta + r^2sin^2\Theta)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r * (cos^4\Theta\sin\Theta + 4\,cos^2\Theta\,sin^3\,\Theta - sin^5\Theta)$$

$$= 0 \qquad \forall\Theta$$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x'(x,y) = f_x'(0,0)$

Donc la fonction f_x' est continue au point (0,0)

$$\begin{cases} f_x'(x,y) continuesur IR^2 - \{(0,0)\} \\ f_x'(x,y) continueaupoint\ (0,0) \end{cases}$$

Donc f_x' est continue sur IR^2.

- Continuité de f_y'

Pour $(x,y) \neq (0,0)$

On a $h : (x,y) \to x^5 - 4x^3y^2 - xy^4$ et $g : (x,y) \to (x^2 + y^2)^2$ sont des fonctions continues sur $IR^2 - \{(0,0)\}$

D'où $f_y^{'}$ est continue sur $IR^2 - \{(0,0)\}$

Pour $(x,y) = (0,0)$

Calculons $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y^{'}(x,y)$

Pour cela, utilisons les coordonnées polaires :

De même posons $\begin{cases} x = r\cos\Theta \;\; ; \; r > 0 \\ y = r\sin\Theta \; ; \; \Theta \in [0,2\pi] \end{cases}$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y^{'}(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^5 cos^5\Theta - r^5 cos\Theta \sin^4\Theta - 4 r^5 sin^3\Theta \, cos^2\Theta}{(r^2cos^2\Theta + r^2 sin^2\Theta)^2}$

$= \lim_{r\to 0} r * (cos^5\Theta - cos\Theta \sin^4\Theta - 4\, sin^3\Theta \, cos^2\Theta)$

$= 0 \qquad \forall \Theta$

On a alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y^{'}(x,y) = f_y^{'}(0,0)$

Donc la fonction $f_y^{'}$ est continue au point (0,0)

$$\begin{cases} f_y^{'}(x,y) continuesur IR^2 - \{(0,0)\} \\ f_y^{'}(x,y) continueaupoint\ (0,0) \end{cases}$$

Donc $f_y^{'}$ est continue sur IR^2.

5- $f_x^{'}$ et $f_y^{'}$ existent et sont continues sur IR^2 donc f est différentielle sur IR^2.

Exercice III:

$$\omega = ydx + (x^2y^2 + x)dy$$

1- On a $\frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$ et $\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 + x) = 2xy^2 + 1$

Et on a $\frac{\partial}{\partial y}(y) = 1 \neq \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 + x) = 2xy^2 + 1$

Donc ω n'est pas exacte.

2- $m(x,y)$ est un facteur intégrant de ω → l'existence d'une fonction f différentielle tel que $m(x,y)\omega = df$

$m(x,y)\omega$ Exacte $\to \frac{\partial}{\partial y}(m(x,y)y) = \frac{\partial}{\partial x}((m(x,y))(x^2y^2 + x))$

$$\frac{\partial}{\partial y}(m(x,y)y) = \frac{\partial}{\partial y}((xy)^\alpha y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^\alpha y^{\alpha+1}) = x^\alpha(\alpha+1)y^\alpha$$

Donc $\frac{\partial}{\partial y}(m(x,y)y) = (\alpha+1)(xy)^\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((m(x,y))(x^2y^2 + x)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}(\,(xy)^{\alpha}(\,x^2y^2) + (xy)^{\alpha}x\,)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(\,(xy)^{\alpha+2} + x^{\alpha+1}y^{\alpha})$$
$$= (2+\alpha)y(xy)^{\alpha+1} + (\alpha+1)\,(xy)^{\alpha}$$

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\Big((m(x,y))(x^2y^2 + x)\Big) = (2+\alpha)x^{\alpha+1}y^{\alpha+2} + (\alpha+1)\,(xy)^{\alpha}$

$\frac{\partial}{\partial y}(m(x,y)\mathrm{y}) = \frac{\partial}{\partial x}\Big((m(x,y))(x^2y^2 + x)\Big)$

$\rightarrow (\alpha+1)\,(xy)^{\alpha} = (2+\alpha)x^{\alpha+1}y^{\alpha+2} + (\alpha+1)\,(xy)^{\alpha}$

$\rightarrow (2+\alpha)x^{\alpha+1}y^{\alpha+2} = 0$

$\rightarrow \alpha = -2$ Ou $x^{\alpha+1}y^{\alpha+2} = 0$

Donc $\alpha = -2$ Ou $x = y = 0$ (impossible car (x>0) et (y>0))

Alors $\alpha = -2$

$m(x,y) = (xy)^{-2}$Facteur intégrant deω

3- $m(x,y) = (xy)^{-2}$facteur intégrant deω → l'existence de f différentielle tel que $m(x,y)\omega = \mathrm{df} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f(x,y)dx} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{f(x,y)dy}$

$\rightarrow (xy)^{-2}y + (xy)^{-2}(x^2y^2 + x)y' = 0$

$y' = \frac{\partial y}{\partial x} \rightarrow \frac{y}{x^2y^2} + \left(\frac{x^2y^2}{x^2y^2} + \frac{x}{x^2y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$

$\rightarrow \frac{1}{x^2y}dx + \left(1 + \frac{1}{xy^2}\right)dy = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2y} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1 + \dfrac{1}{xy^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int \frac{dx}{x^2y} = \frac{1}{y}\int \frac{dx}{x^2} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1 + \dfrac{1}{xy^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x,y) = -\dfrac{1}{xy} + g(y), \quad g(y) une\ fonction\ de\ variable\ x\ dérivable \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(-\frac{1}{xy} + g(y))}{\partial y} = 1 + \dfrac{1}{xy^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x,y) = -\frac{1}{xy} + g(y) \\ \frac{1}{xy^2} + g'(y) = 1 + \frac{1}{xy^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) = -\frac{1}{xy} + g(y) \\ g(y) = \int g'(y) = \int 1dy = y + C_1 \end{cases}$$

Et par suite $f(x,y) = -\frac{1}{xy} + y + C_1\,,\quad C_1 \in IR$

On a $\omega = 0 \rightarrow m(x,y)\omega = 0 \rightarrow \mathrm{df} = 0$

Donc $f = \lambda = conste$

$\rightarrow f(x,y) = -\frac{1}{xy} + y + C_1 = conste$

$$f(x,y) = -\frac{1}{xy} + y = \lambda = constante$$

Conclusion : Les solutions de l'équation différentielle ω sont donnée par
$-\frac{1}{xy} + y = conste.$

Contrôle 1 Analyse 2 : Année 2008 /2009

Exercice 1

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 + (x+y)\log(1+x^2+y^2)$.

1) Vérifier que (0,0) est un point critique de f.
2) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 de f au point (0,0).
3) Préciser la nature de ce point critique.

Exercice 2

On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 3y^2 + x^4 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Calculer $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2) Etudier la continuité de f'_x et f'_y dans $\mathbb{R}^2$?
3) f est-elle différentiable dans $\mathbb{R}^2$? Justifier votre réponse.
4) Etudier l'existence de $f''_{xx}(0,0)$et$f''_{yy}(0,0)$.
5) Montre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$.
6) En déduire que f possédé un développement limité à l'ordre 2 au point (0,0)

Exercice 3 (4pts)

On considère l'équation

$$2f'_x - f'_y = f \quad \text{(E)}$$

On pose $= 4v$, $y = 3u^2 - 2v$, $F(u,v) = f(x,y)$.

1) Calculer f'_x *et* f'_y en fonction de F'_u*et* F'_v .
2) Réécrire l'équation (E) en fonction de u *et* v .

Corrigés Contrôle 1 Analyse 2 : Année 2008 /2009

Exercice 1

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 + (x+y)\log(1+x^2+y^2)$.

1) on calcul f'_x et f'_y.

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + \log(1+x^2+y^2) + \frac{2x(x+y)}{1+x^2+y^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y + \log(1+x^2+y^2) + \frac{2y(x+y)}{1+x^2+y^2}$$

On a : $\begin{cases} f'_x(0,0) = 0 \\ f'_y(0,0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ le point $(0,0)$ est un point critique de f

2) Formule de Taylor à l'ordre 2 de f au point $(0,0)$.

On a :

- $f''_x(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x} = 2 + \frac{2x}{1+x^2+y^2} + \frac{(2x+2(x+y))(1+x^2+y^2) - 4x^2(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}$
- $f''_y(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y} = 2 + \frac{2y}{1+x^2+y^2} + \frac{(2y+2(x+y))(1+x^2+y^2) - 4y^2(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}$
- $f''_{xy}(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2} + \frac{2x(1+x^2+y^2) - 2x2y(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}$

$$f''_x(0,0) = 2 \,;\, f''_y(0,0) = 2 \text{et} f''_{xy}(0,0) = 0$$

Or ; on a la formule de Taylor s'écrit :

$$f(h+0\,,k+0)$$
$$= f(0,0) + hf'_x(0,0) + hf'_y(0,0)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(0,0)h^2 \; + 2f''_{xx}(0,0)h + f''_{yy}(0,0)k^2\right) + (h^2k^2)\,\varepsilon(h,k)$$

Avec : $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) \Longrightarrow 0$

Donc : $f(h,k) = \frac{1}{2}(2\times h^2 + 2\times 0 + 2\times k^2) + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k)$

$\Longrightarrow f(h,k) = h^2 + k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k)$

3) On a : $f''^{\,2}_{xy}(0,0) - f''_{xx}(0,0)f''_{yy}(0,0) = -4 < 0$

Or $f''_{xx}(0,0) > 0 \Longrightarrow$ admet un minimum en $(0,0)$.

Exercice 2 (12pts)

On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+3y^2+x^4\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

1)

✓ Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$

- On a : $f'_x(x,y)=2x+4x^3\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^5}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
- Et : $f'_y(x,y)=6y-\frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

✓ Pour tout $(x,y)=(0,0)$

- On a : $\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x^4\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x+x^3\sin\frac{1}{x}$

Or $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq1 \iff \left|x^3\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x^3|$ avec $\lim_{x\to0}|x^3|=0$

Donc : $\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0 \iff f'_x(0,0)=0$ si $(x,y)=(0,0)$

- On a : $\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}3y=0 \iff f'_y(0,0)=0$

D'ou : $f'_x(x,y)=\begin{cases}2x+4x^3\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-\frac{2x^5}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}6y-\frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2) la continuité de f'_x et f'_y dans $\mathbb{R}^2$

- $f'_x(x,y)$

La fonction f'_x est continue en tout point (x,y)≠ (0,0)

Car c'est la somme, produit, rapport et composé des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

- Pour $(x,y)=(0,0)$

On a $|f'_x(x,y)|\leq2|x|+4|x^3|.\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|+2\left|\frac{x^5}{(x^2+y^2)^2}\right|.\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right|$

Avec $4|x^3|.\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leq4|x^3|$

Et $\quad 2\left|\frac{x^5}{(x^2+y^2)^2}\right|.\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq 2|x|\left|\frac{x^5}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq 2|x|$

Car $\quad \left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq 1$; $\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq 1$ et $x^2 < x^2+y^2$

Alors $\quad |f'_x(x,y)| \leq 2|x| + 4|x^3| + 2|x| \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|x| + 4|x^3| + 2|x| = 0 \Leftrightarrow f'_x(x,y)$ est continu sur $\mathbb{R}^2$

- ✓ f'_y est continu en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ car f'_x est la somme , produit rapport et composé des fonction continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0,0)\}$.

Pour $(x,y) = (0,0)$ on a $\left|f'_y(x,y)\right| = \left|6y - \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|$

$$\leq 6|y| - 2\left|\frac{yx^4}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|$$

On a $\quad \left|\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1 \quad$ et $\quad \left|\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{1}{4} \quad$ car $\quad x^2 < \frac{x^2+y^2}{2}$

Alors $\left|f'_y(x,y)\right| = 6|y| + 2|y| = 7|y| \quad$ et $\quad \lim_{y\to 0} 7|y| = 0$

A d'où $f'_y(x,y)$ *est continue sur* 0

Donc : $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ sont continués sur $\mathbb{R}^2$.

3) f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$ car f admet des dérivées partielles $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ et dérivées sont continués sur $\mathbb{R}^2$

4)

$\lim_{x\to 0}\frac{f'_x(x,0) - f'_x(0,0)}{x-0} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2x^5}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} 2 + 4x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

on a : $\quad \left|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow \left|4x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq 4x^2$

Or $\quad \lim_{x-0} 4x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x-0} 4x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

Avec $\lim\limits_{x-0}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *n'existepas*

en effets : soit $U_k = \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$, $V_k = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2k\pi}}$

on a : $\lim_{k-0} U_k = \lim_{k-0} V_k = 0$mais ,$\cos\frac{1}{U^2} = \cos 2k\pi = 1$ et $\cos\frac{1}{V^2} = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0$.

La limite n'existe pas donc f''_{xx} n'existe pas

$\lim_{x\to 0} \frac{f'_y(y,0) - f'_y(0,0)}{y-0} = \frac{6y}{y} = 6$ donc $f''_{yy}(0,0) = 6 f''_{yy}\ existe$

5)

on a $\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| = x^2\frac{x^2}{x^2+y^2}\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \le x^2$

or $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$ donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$

6)

on a $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + x^4\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\ \forall(x,y) \neq (0,0)$

on pose $\theta(x,y) = \frac{x^4}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ on a $\lim_{(x,y)} \theta(x,y) = 0$

$f(x,y) = x^2 + 3y^2 + (x^2+y^2)\theta(x,y)$ avec $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \theta(x,y) = 0$

donc f admet un développement limité au voisinage de (0,0) à l'ordre 2

f s'écrit : $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + (x^2+y^2)\theta(x,y)$ avec $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \theta(x,y) \to 0$

Exercice 3

On considère l'équation

$$2f'_x - f'_y = f : \text{(E)}$$

On pose $= 4v$, $y = 3u^2 - 2v$, $F(u,v) = f(x,y)$.

1)

on calcule $f'_x\ et\ f'_y$ en fonction de $F'_u et\ F'_v$

$$F'_u = \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial u} = 6u\frac{\partial f}{\partial y} = 6uf'_y$$

$$F'_v = \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial v} = 4f'_x - 2f'_y$$

$$\Rightarrow\begin{cases} F'_u = 6uf'_y \\ F'_v = 4f'_x - 2f'_y \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{F'_u}{6u} = f'_y \\ F'_v + 2f'_y = 4f'_x \end{cases} \quad \text{donc} \begin{cases} f'_y = \frac{F'_u}{6u} \\ f'_x = \frac{F'_v}{4} + \frac{F'_u}{12u} \end{cases}$$

2)

on a $2f'_x - f'_y = f \Longrightarrow 2(\frac{F'_v}{4} + \frac{F'_u}{12u}) - \frac{F'_u}{6u} = f$

$\Longrightarrow F'_v = 2f\ (E')$

donc la résolution de l'équation différentielle $2f'_x - f'_y = f$ est équivalente à la résolution du $F'_v = 2f \Longrightarrow F(u,v) = Ae^{2V}$

Electricité :

Contrôle I Electricité I SMP-SMA-SMC 2004/2005

N.B. pour l'exercice I, répondre brièvement mais de manière précise.

Exercice I

A- Soit un conducteur plein (C) qui a la fore d'un ellipsoïde (voir la figure 1-a). Ce conducteur (C) porte une charge Q positive, isolé et en équilibre électrostatique.

Répondre aux questions suivantes en justifiant vos réponses :

1- Le champ est-il nul à l'intérieur de (C)?

2- Le potentiel est-il le même en A et en A' ?

(Les points A et A' étant deux points de la surface du conducteur (C) (voir la figure 1-a).

3- La densité de charge est-elle positive, négative ou nulle ?

4- La densité de charge est-elle la même en A et en A' ?

5- Les modules des champs au voisinage des points A et A' sont-t-ils les même ?

B- On approche du conducteur (C) une sphère conductrice initialement neutre et isolée (figure 1-b). l'ensemble des deux conducteurs est en équilibre électrostatique.

1- Les conducteurs (C) et (S) sont-ils en influence totale ? justifier votre réponse.

2- Illustrer sur le même schéma :

a- La réparation des charges sur les conducteurs (C) et (S).

b- Une représentation des lignes de champ entre les deux conducteurs.

3- Comparer les valeurs du potentiel en A et au point B.

4- Que se passera-t-il si on relie la sphère (S) au sol.

Exercice II :

On considère le circuit de la figure 2-a

1- En appliquant les lois de Kirchhoff, déterminer les courants I_1 , I_2 et I_3 en fonction de E,R_1 , R_2 etR_3 .

Pour les questions suivantes, on prendra R_1 =R_2 =R_3 =R

2- On branche aux bornes de la résistance R_3 un dipôle (E', r') (voir la figure 2-b), par l'application du théorème de Thevenin, déterminer le courant I' traversant le dipôle (E', r') (on donnera l'expression littérale de I').

3- On donne E = 40V, E' = 10V, r' = 2Ω et R = 24 Ω, calculer numériquement le courant I', le dipôle (E', r') est-il un générateur ou un récepteur ? Justifier votre réponse.

4- Calculer la puissance P consommée par le dipôle (E', r').

A'
C
A

figure1-a

A'
C
A
B
O
S

figure1-b

I1
R1
I3
E
A
R2
R3
I2
B

figure-2-a

R
E
I'
A
R
R
r
E'
B

figure-2-b

Corrigés Contrôle I Electricité I SMP-SMA-SMC 2004/2005

Exercice I :

A-

1- Oui le champ à l'intérieur du conducteur est nul.
Parce que :
- Le champ est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre.

Ou - puisque les charges est immobiles à l'intérieur des conducteur donc la somme des forces électriques est nulle ($\vec{F} = 0$)

2- Oui le potentiel est le même en A et A'.
Parce que :
- Le conducteur est en équilibre électrostatique ce qui implique $\vec{E} = 0$ et puisque on a $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = \vec{0}$ donc V = constante, d'où $V_A = V_{A'}$

3- La densité des charges volumique est nulle.
Parce que :
- D'après la relation de la forme locale du théorème de Gausse $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et puisque E = 0 à l'intérieur du conducteur,
Donc $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ et par suite **ρ** = 0 (**ε** # 0).

4- La densité de charge en A et en A' n'est pas la même.-
Parce que :
- La forme de la surface en A et en A' n'est pas la même.

Ou - Le rayon de la courbure en A et en A' n'est pas le même.

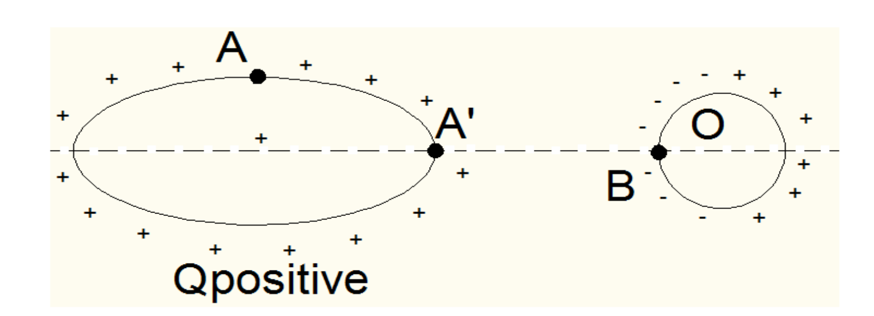
5- Le champ au voisinage de A et A' n'est pas le même.
Parce que :
- D'après le théorème de Coulomb, le champ au voisinage d'un point du conducteur en équilibre dépend de la densité en ce point, et comme σ (A) # σ (A') ce qui est implique que les champs au voisinage de A et A' sont différents.

B-

1- Non, les deux conducteurs sont en influence partielle.
Parce que :
- Aucun conducteur n'entoure pas l'autre.

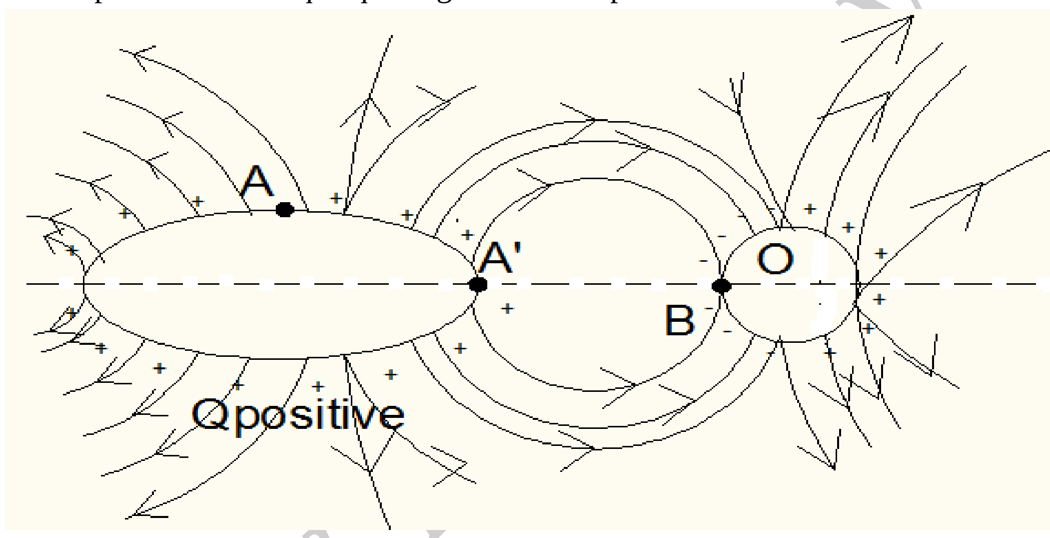
Ou - toutes les lignes de champ partant du conducteur (C) n'arrivent pas totalement au conducteur (S).

2- a – la répartition des charges sur les deux conducteurs.



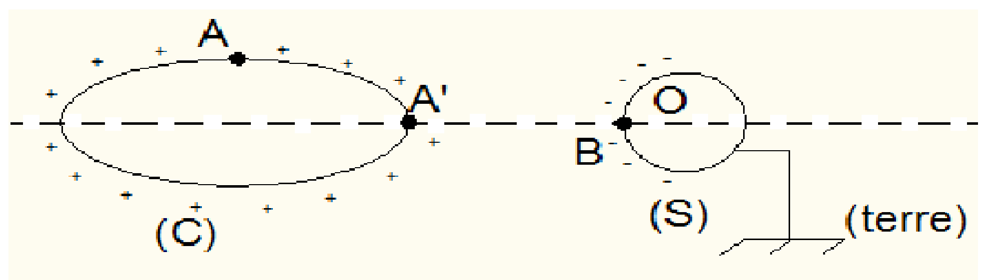
Les charges positives du conducteur (C) attirent les charges négatives du conducteur (S) et repoussent les charges positives.

b-La représentation de quelques lignes de champ.



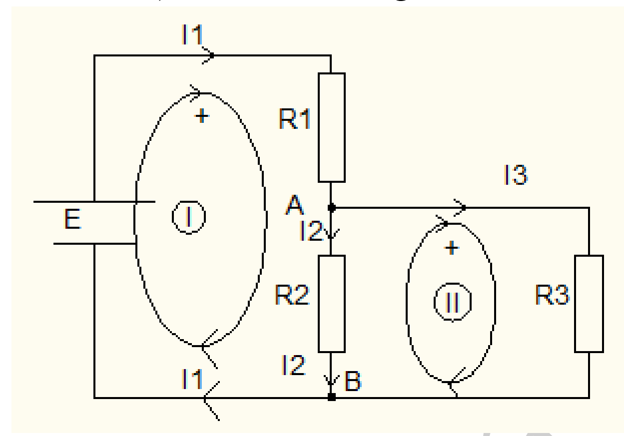
Les lignes de champ partent de (C) perpendiculairement à la surface et aboutissent à (S) également perpendiculairement à la surface.

3- Le potentiel en B est inferieur à le potentiel en A (V(A)>V(B))
   Parce que :
   - De A vers B les potentiels décroissants ($\vec{E} = -\overrightarrow{grad}$V)
4- Si on relie (S) au sol les charges positives du conducteur (S) vont s'écouler vers la terre.



Exercice II :

1- Application des lois de Kirchhoff
(Loi des nœuds et loi des mailles) au circuit de la figure 2-a.



-Loi des nœuds :

Nœud A → $I_1 = I_2 + I_3$

Nœud B → $I_1 = I_2 + I_3$ (même équation)

Donc $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ (1)

-Loi des mailles :

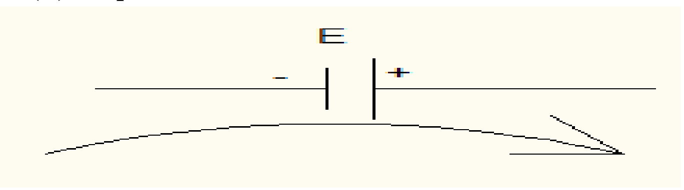
Dans le circuit il y a deux mailles indépendantes (I) et (II).

- Pour la maille (I) on a

$$-E + R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$$

R1 I1
+R1*I1 (même-sens)

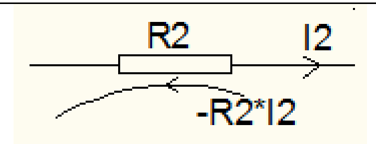
On met –E car on rencontre le pôle (-) en premier.
Si on rencontre le pôle (+) on premier on met +E.



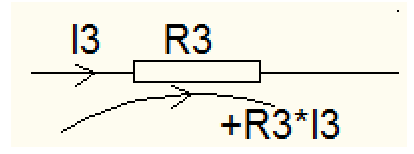
Donc $R_1 I_1 + R_2 I_2 = E$ (2)

- Pour la maille (II) on a $R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$ (3)

On met le signe (-) devant $R_2 I_2$ car le sens de parcours est différent que celui du courant I_2 .



On met le signe (+) devant $R_3 I_3$ car le sens de parcours est le que celui même du courant I_3 .



Les relations (1), (2) et (3) forment le système suivant :

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (1) \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + 0 = \mathrm{E} \quad (2) \\ 0 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

(2) $\leftrightarrow \quad R_2 I_2 = \mathrm{E} - R_1 I_1 \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{\mathrm{E}}{R_2} - \frac{R_1}{R_2} I_1$ (2)’

(3) $\leftrightarrow \quad R_3 I_3 = R_2 I_2 \quad \rightarrow \quad I_3 = \frac{R_2}{R_3} I_2$ (3)’

(3)’ Dans (1) $\rightarrow \quad I_1 - I_2 - \frac{R_2}{R_3} I_2 = 0$

$\rightarrow \quad I_1 - \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) I_2 = 0$ (1)’

(2)’ Dans (1)’ $\rightarrow \quad I_1 - \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)\left(\frac{\mathrm{E}}{R_2} - \frac{R_1}{R_2} I_1\right) = 0$

$\rightarrow \quad I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right) - \left(\frac{\mathrm{E}}{R_2} + \frac{\mathrm{E}}{R_3}\right) = 0$

$\rightarrow \quad I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right) - E\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 0$

$\rightarrow \quad I_1 = E\left(\frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3}\right) * \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right)}$

$\rightarrow \quad \boxed{I_1 = E\left(\frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_1}\right)}$

-Pour I_2

(2) $\leftrightarrow \quad R_1 I_1 = \mathrm{E} - R_2 I_2 \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{\mathrm{E}}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} I_2$ (2)’’

(1)’ $\rightarrow \quad I_1 - \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) I_2 = 0$

(2)’’ dans (1)’ $\rightarrow \quad \frac{E}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} I_2 - I_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) = 0$

$\rightarrow \quad -I_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_1}\right) = -\frac{E}{R_2}$

$\rightarrow \quad I_2 = \left(\frac{E}{R_1}\right) * \frac{1}{\left(1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_1}\right)}$

$\rightarrow \quad \boxed{I_2 = \left(\frac{R_3 E}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_1}\right)}$

-Pour I_3

On a $\quad I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad \leftrightarrow \quad I_3 = I_1 - I_2$

$\rightarrow \qquad I_3 = E\left(\frac{R_2 + R_3}{R_2\,R_3 + R_1\,R_3 + R_2\,R_1}\right) - \left(\frac{R_3\,E}{R_2\,R_3 + R_1\,R_3 + R_2\,R_1}\right)$

$\rightarrow \qquad \boxed{I_3 = \frac{ER_2}{R_2\,R_3 + R_1\,R_3 + R_2\,R_1}}$

$2^{ème}$Méthode :

On a

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 & (1) \\ R_1\,I_1 + R_2\,I_2 + 0 = E & (2) \\ 0 - R_2\,I_2 + R_3\,I_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$$

On pose $\quad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix}$ est la matrice associée au système.

Donc $I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta}$, $I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta}$,$I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta}$

Avec **Δ** = det I le déterminant associé au système.

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} \quad \Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & E \\ 0 & -R_2 & 0 \end{vmatrix}$$

Et $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} = R_2\,R_3 + R_1\,R_3 + R_2\,R_1$

Pour I_1 : on a $I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta}$

Et puisque $\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix}$ En remplaçant la première colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$

Et on trouve que $\Delta I_1 = (R_2 + R_3)E$

Ce qui donne $I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = E\left(\frac{R_2 + R_3}{R_2\,R_3 + R_1\,R_3 + R_2\,R_1}\right)$

Pour I_2 : on a $I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta}$

Et puisque $\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{vmatrix}$ En remplaçant la deuxième colonne $\begin{pmatrix} -1 \\ R_2 \\ -R_3 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc on trouve que $\Delta I_2 = R_3\,E$

Ce qui donne $I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \left(\frac{R_3\,E}{R_2\,R_3 + R_1\,R_3 + R_2\,R_1}\right)$

Pour I_3 : on a $I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta}$

Et puisque $\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & E \\ 0 & -R_2 & 0 \end{vmatrix}$ En remplaçant la troisième colonne $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -R_3 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc on trouve que $\Delta I_3 = R_2 E$

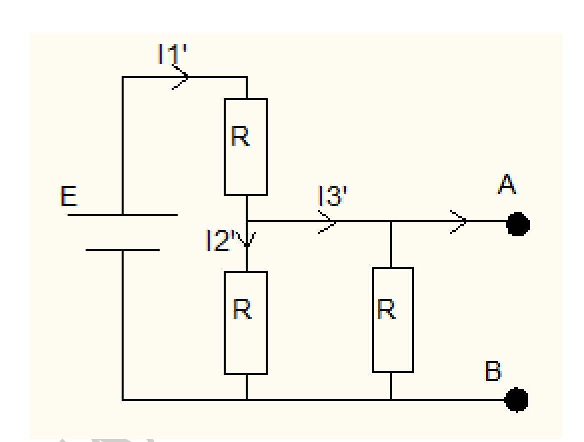
Ce qui donne $I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta} = \frac{ER_2}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_1}$

Par suite on prendra $R_1 = R_2 = R_3 = R$

2- Application du théorème de Thevenin

On enlève la branche AB contenant le dipôle (E', r') le montage devient celui de la figure 2-a avec $R_1 = R_2 = R_3 = R$

- Tension de TheveninE_{th}.



$$E_{th} = (V_A - V_B) = RI'_3$$

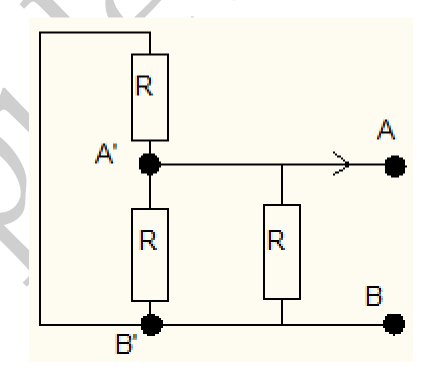
Avec $I'_3 = \frac{RE}{R^2 + R^2 + R^2}$

Donc $I'_3 = \frac{E}{3R}$

Et par suite $E_{th} = \frac{RE}{3R}$

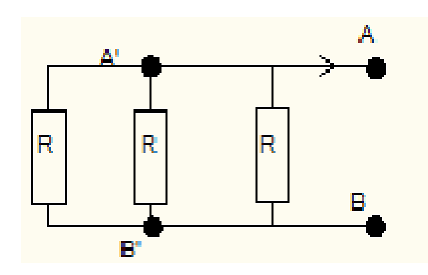
D'où $E_{th} = \frac{E}{3}$

- Résistance de Thévenin R_{th}



On court-circuit le générateur E

→



R_{th} = R//R//R

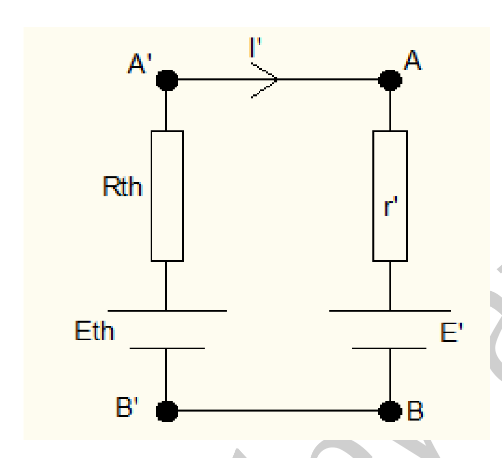
→ $\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R}$

D'où $R_{th} = \frac{R}{3}$

- On met la branche AB enlevée

Soit le montage suivant :

$$V_{AB} = V_{A'B'}$$



Et on a

$$V_{AB} = E_{th} - R_{th}\, I'$$

$$V_{A'B'} = E' + r'I'$$

$$\rightarrow \quad E_{th} - R_{th}\, I' = E' + r'I'$$

$$\rightarrow \quad E_{th} - E' = (r' + R_{th})I'$$

Donc $I' = \frac{E_{th}-E'}{r'+R_{th}} = \frac{\frac{E}{3}-E'}{r'+\frac{R}{3}}$

Et par suite $I' = \frac{E \ -3\,E'}{3r'+R}$

3- <u>Application numérique</u>

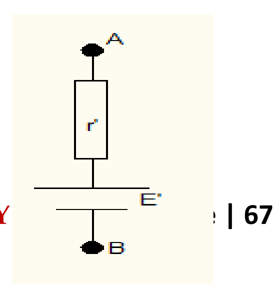
E = 40V, E' = 10V, r' = 2Ω et R = 24 Ω

$I' = \frac{E \ -3\,E'}{3r' + R} = \frac{40 - 3 * 10}{3 * 2 + 24} = 0.33A$

On a I'>0 → le dipôle (E', r') se comporte comme un récepteur.

4- La puissance consommée par le récepteur (E', r')

$$P = (E' + r'I')I'$$



Donc $P = E'I' + r'I'^2$

Application numérique :

E'= 10V, I4 = 0.33A et r' = 2Ω

$\rightarrow P = 10 * 0.33 + 2 * (0.33)^2$
D'où $P = 3.52W$

Contrôle 2 électricités 1 2007 /2008

Exercice 1

Soit un conducteur (A) sphérique de rayon R_1 portant la charge Q. (A) est supposé en équilibre.

1) Comment est répartie la charge Q dans le conducteur (A) et avec quelle densité ?
2) Quel est le champ au voisinage du conducteur ? Justifier votre réponse.
3) Quel est le potentiel dV crée au centre O du conducteur (A) par un élément de sa surface dS portant la charge dQ ? En déduire la capacité du conducteur (A).
4) En déduire la capacité du conducteur (A).

Un autre conducteur (B) sphérique et creux, de rayon interne R_2 et externe $R_3 (R_1 < R_2 < R_3)$ initialement neutre, entoure le premier conducteur (A) $(qui\ porte\ toujours\ la\ charge\ Q)$.

5) Quelle est la charge Q_B de (B) et comment est-elle répartie ?
6) On met le conducteur (B) au sol. quelle est la nouvelle répartition de charge ? Justifie votre réponse.
7) Quel est le potentiel V_B du conducteur (B) ?
8) Déterminer le nouveau potentiel V_A du conducteur (A).
9) Que représente l'association des conducteurs (A) et (B) ? Quelle est ça capacité ?

Exercice 2

Soit le circuit de la figure1 constitué de résistances$r_i (i = 1,2,3)$.

1) Exprimer les résistances équivalentes R_{AC} entre A et C et R_{AB} entre A et B en fonction des r_i et calculer leurs valeurs.

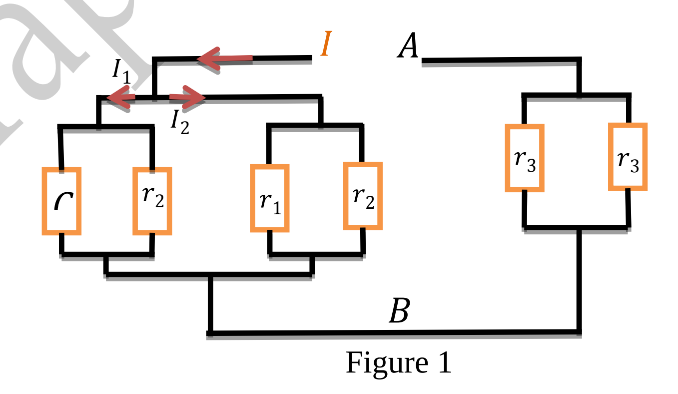


Figure 1

On donne $r_i = 20\Omega$; $r_2 = 30\Omega$; $r_3 = 40\Omega$.

2) Supposons que l'on branche entre A et B un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r.
   a) Déterminer la ddpU_{AC} entre A et C
   b) Déduire les intensités des courants qui circulent dans les résistances$r_i (i = 1,2,3)$.
   c) Trouver le courant I_1 débité par le générateur.(On donnera l'expression littérale puis la valeur numérique). On donne $r = 1\Omega\ et\ E = 60V$

3) Le générateur précédent (E,r) est maintenant branché entre A et B. Calculer le courant I_2 débité par le générateur.
4) Comparer les expressions de I_1 *et* I_2 . a quelle condition sont-t-elles égales ? Le courant dérivé par un générateur de tension dépend-il du circuit que l'on branche à ses bornes ? Justifier votre réponse.
5) Calculer pour chacune des situations des questions 2 et 3 : (On donnera les expressions littérales puis les valeurs numériques).
   a) Les puissances fournies par le générateur. On notera P_1 et P_2 ces puissances.
   b) Les puissances dissipées par effet Joule dans le générateur. On les notera P_3et P_4.
   c) Les puissances dissipées par effet Joule dans le circuit extérieur au générateur. On les notera P_5et P_6.
   d) Vérifier la conservation des puissances.

Corrigés Contrôle 2 électricités 1 2007 /2008

Exercice 1

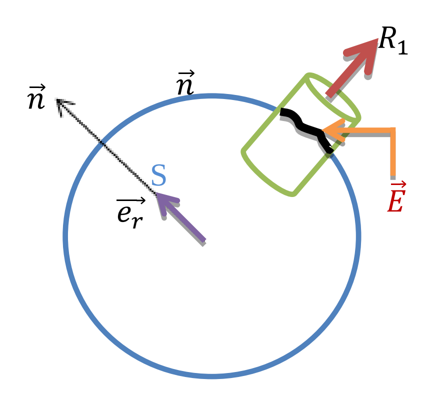
1) Comme le conducteur (A) est supposé en équilibre donc le charge Q est répartie sur la surface, avec une densité surfacique $\sigma = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_1^2}$

   En effet : $Q = \iint \sigma dS$

   Comme le conducteur (A) est sphérique donc le rayon de courbure est uniforme

   ➔ $Q = \sigma \iint dS = \sigma S$ ou S la surface de (A) ➔ $Q = \sigma 4\pi\varepsilon R_1^2$

   ➔ $\sigma = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_1^2}$



2) Le champ au voisinage de (A) la surface S du conducteur est une équipotentielles$\left(car\ V_{surface} = V_{int} = cst\right)$, et les ligne de champ sont normales au équipotentielles $(car\ \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V)$, ou bien la distribution admet une symétrique donc le champ est porté par $\vec{e_r}(\vec{e_r}\ \perp au\ surface\ S)$ avec $\vec{e_r} =$

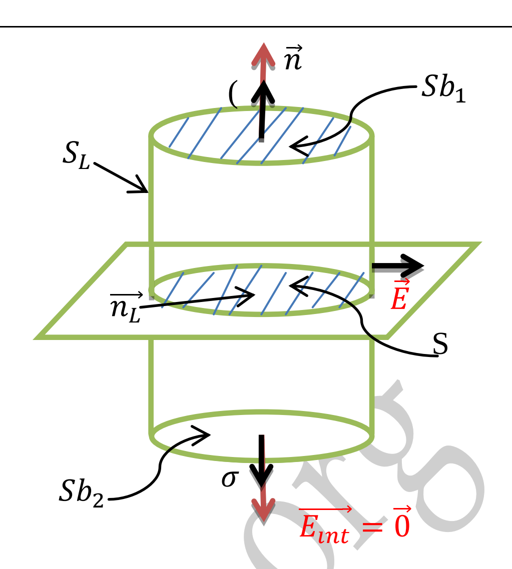
$\vec{n}$, $(\vec{e_r} \parallel \vec{n})$ ou $\vec{n}$ la normal au conducteur ➔$\vec{E} = E\vec{n}$

Théorème de Gauss : $\emptyset = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\emptyset = \iint_{Sb_1} E.\vec{n}.dS.b_1.\vec{n}$

$$+ \iint_{Sb_1} E.\overrightarrow{(-n)}.dS.b_2.\vec{n_l}$$

$$+ \iint E.\vec{n}.dS_2.\vec{n}_2$$



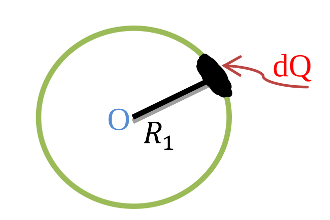
$\emptyset = ESb_1 + 0 + 0 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$(avec S=$Sb_1$)

➔ E=$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$➔$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

Donc le champ au voisinage du conducteur est
$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ avec σ *la densité surfacique* et
$\vec{n}$ *la normal au conducteur* (*theo. de coulomb*)

3) Le potentiel dV crée au centre O du conducteur.

$$dV(0) = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$



➢ Pour V(0) :

On a: $V(0) = \iint dV(0) = \iint \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R_1}\iint dS = \frac{\sigma S}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

Si la surface de la sphère {conducteur (A)} ➔$S = 4\pi R_1^2$

Alors : $V(0) = \frac{\sigma S}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\sigma 4\pi R_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}$

Le conducteur (A) est en équilibre, donc d'après (1) on a $\sigma = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_1^2}$

➔$V(0) = \frac{QR_1}{4\pi\varepsilon R_1^2}$➔$V(0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_1} = cst$

Donc le potentiel V est le même que celui crée par la charge Q placée au centre O .

4) La capacité C par définition est : $c = \frac{Q}{V}$➔$c = 4\pi\varepsilon R_1$

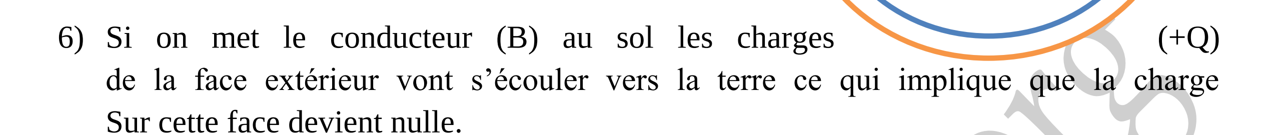
5) Le conducteur (B) est initialement neutre donc $Q_B = 0$
   ➢ La répartition des charges sur les deux conducteur

✓ Influence total ➔$Q_{B_{int}} = -Q$

Et puisque (B) est neutre

➔$Q_B = Q_{B_{int}} + Q_{B_{ext}} = 0$

➔$Q_{B_{ext}} = -Q_{B_{int}} = Q$



6) Si on met le conducteur (B) au sol les charges (+Q) de la face extérieur vont s'écouler vers la terre ce qui implique que la charge Sur cette face devient nulle.

7) Potentiel V_B ,

On a : $V_B = \frac{Q-Q}{4\pi\varepsilon_0 OP}$ pour un point P

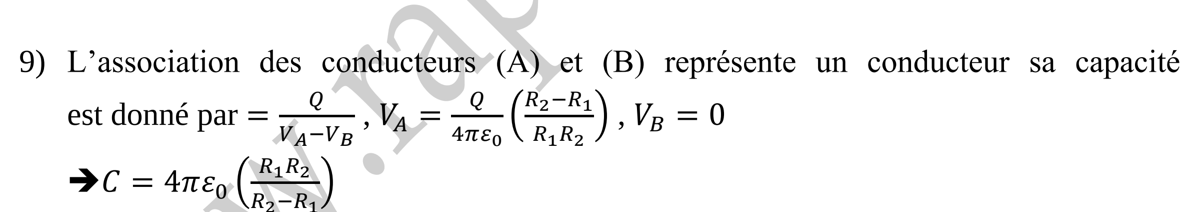
Avce OP=R_2 ou R_3➔$V_B = 0$

8)

On a pour un point O, $V_O = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

D'après (3) : $\left(V_O = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)$

➔$V_O = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right)$, comme A en équilibre $V_O = V_A = cste$



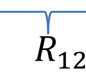
9) L'association des conducteurs (A) et (B) représente un conducteur sa capacité est donné par $= \frac{Q}{V_A - V_B}$, $V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right)$, $V_B = 0$

➔$C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\right)$

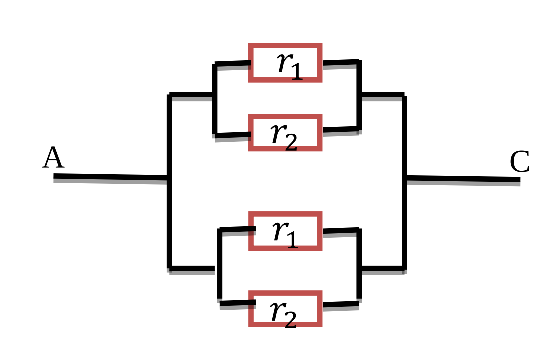
Exercice 2

1) La résistance équivalente R_{AC}

$R_{AC} = (r_1 \parallel r_2) \parallel (r_1 \parallel r_2)$



R_{12}



➔$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1+r_2}{r_1r_2}$

➔$R_{12} = \frac{r_2r_1}{r_1+r_2}$, Alors : $R_{AC} = \left(\frac{r_2r_1}{r_1+r_2}\right) \parallel \left(\frac{r_2r_1}{r_1+r_2}\right)$

$$= \frac{\frac{r_2 r_1}{r_1+r_2} * \frac{r_2 r_1}{r_1+r_2}}{\frac{r_2 r_1}{r_1+r_2} + \frac{r_2 r_1}{r_1+r_2}}$$

$$= \frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2)}$$

- La résistance équivalent R_{AB} : $R_{AB} = R_{AC} + R_{CB} = R_{AC} + (r_3 \parallel r_3)$.

$$= \frac{r_2 r_1}{2(r_1+r_2)} + \frac{r_3^2}{r_3+r_3} = R_{AC} + \frac{r^3}{2}$$

Avec : $R_{AC} = \frac{20*30}{2(20+30)} = 6\Omega$ et $R_{AB} = 6 + \frac{40}{2} = 26\ \Omega$

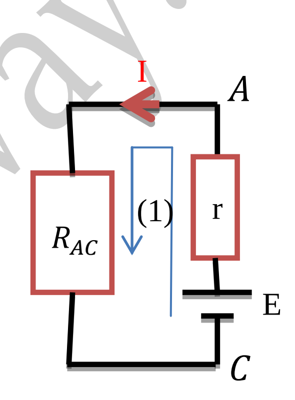
2)

a) On a $U_{AC} = R_{AC} * I_1$ (1) ,
la loi de maille :

$$-E + rI_1 + R_{AC} I_1 = 0$$

➔ $I_1 = \frac{E}{R_{AC}+r}$ (2)

(2) dans (1) ➔ $U_{AC} = \frac{R_{AC}*E}{R_{AC}+r}$



b) L'intensité de courant qui circulé dans r_1

Maille (I) : $r_1 i_1 - r_2 i_2 = 0$

Nœud A' : $I_1 = I' + I''$

➔ On a :

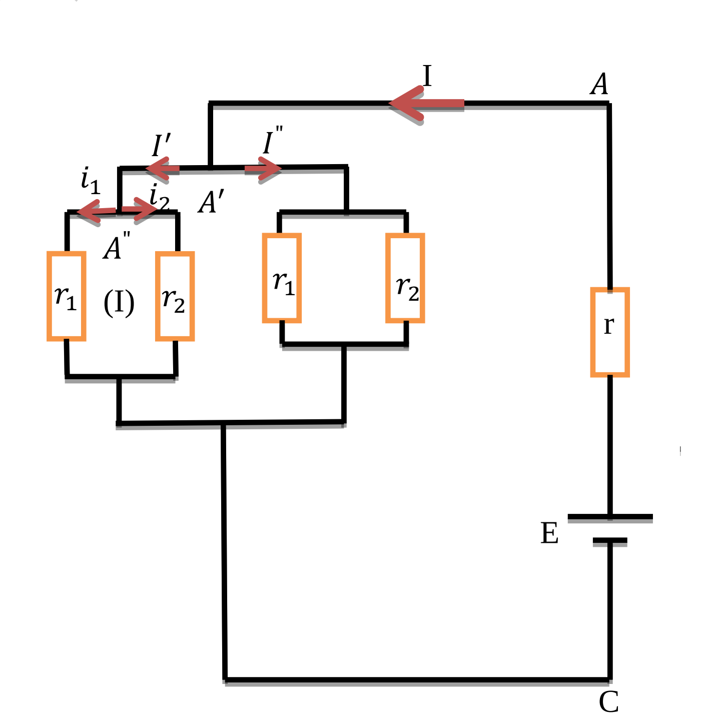
$$(r_1 \parallel r_2)I' + (r_1 \parallel r_2)I'' = 0$$

➔ Alors : $I' = I''$

Donc : $I_1 = 2I'$

Nœud A'' : $I' = i_1 + i_2 = \frac{I_1}{2}$

$$\begin{cases} r_1 i_1 - r_2 i_2 = 0 \\ i_1 + i_2 = \frac{I_1}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} i_1 = \frac{r_2}{r_1} i_2 \\ \frac{r_2}{r_1} i_2 + i_2 = \frac{I_1}{2} = \frac{U_{AC}}{2R_{AC}} \end{cases}$$

➔ $i_2\left(\frac{r_1+r_2}{r_1}\right) = \frac{U_{AC}}{2} \times \frac{2(r_1+r_2)}{r_1 r_2}$ Avec $\left(R_{AC} = \frac{2r_1 r_2}{(r_1+r_2)}\right)$

➔ $i_2 = \frac{U_{AC}}{2}$ De même $i_1 = \frac{U_{AC}}{r_1}$

Ou plus simple, toutes les résistances ont la même tension U_{AC}

Donc $U_{AC} = r_1 i_1 = r_2 i_2$ ➔ $\begin{cases} i_1 = \frac{U_{AC}}{r_1} \\ i_2 = \frac{U_{AC}}{r_2} \end{cases}$

Et : $i_3 = 0$ car le circuit est ouvert.

c) D'après la relation (2) de { 2)-a)}
$I_1 = \frac{E}{R_{AC}+r}$, application numérique $I_1 = \frac{60}{6+1} = 8{,}57\ A$.

3) Le générateur (E,r) est branche entre A et B
Maille (I) :

$$-E + rI_2 + R_{AC}I_2 + R_{BC}I_2 = 0$$

➔ $I_2 = \frac{E}{R_{AC}+R_{BC}+r}$ avec : $R_{BC} = r_3 \parallel r_3 = \frac{r_3}{2}$

➔ $I_2 = \frac{E}{R_{AC}+\frac{r_3}{2}+r}$ AN ; $I_2 = \frac{60}{6+\frac{40}{2}+1} = 2{,}22\ A$

4) On a $I_1 = 8{,}57\ A$ et $I_2 = 2{,}22\ A$ donc : $I_1 > I_2$

✓ $I_1 = I_2$ ➔ $\frac{E}{R_{AC}+r} = \frac{E}{R_{AC}+\frac{r_3}{2}+r}$

➔ $R_{AC} + r = R_{AC} + \frac{r_3}{2} + r$

➔ $\frac{r_3}{2} = 0$ ➔ $r_3 = 0\ \Omega$

Il est donc évident que le courant délivré par un générateur de tension dépend du circuit branche entre ses bornes.

5)

a) $P_1 = EI_1 = 514{,}28\ W$

$$P_2 = EI_2 = 133{,}3\ W$$

b) $P_3 = rI_1^2 = 73{,}47\ W$

$$P_4 = rI_2^2 = 4{,}94\ W$$

c) $P_5 = R_{AC}U_{AC} = R_{AC}I_1^2 = 440{,}8\ W$

$$P_6 = R_{AB}U_{AB} = R_{AB}I_2^2 = 128{,}4\ W$$

d) On a vérifié bien que $P_1 = P_3 + P_5$ et $P_2 = P_4 + P_6$

Contrôle 2 Electricité 1: SMP-SMC 2006/2007

Exercice I :

Une sphère conductrice pleine de centre **O** et de rayon **R** portant une charge **Q** uniformément répartie avec une densité **σ** est en équilibre électrostatique .

1°-Déterminer le potentiel électrostatique **V** de ce conducteur

2°- Déterminer la capacité **C** de ce conducteur

3°- Déterminer la valeur de rayon **R** pour réaliser une capacité de **1 Farad.**

4°-Physiquement cette capacité est elle réalisable? Justifier votre réponse.

On donne $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}(M.K.S.A.)$

Exercice 2 :

Dans une salle de travaux pratiques ; on dispose d'un générateur idéal de force électromotrice **E** **supérieur** à **12 V.** On veut alimenter une lampe de **12V** (la lampe ne s'allume que lorsque **la tension à ces bornes est égale à 12V).** Pour ce faire on a réalisé le montage de la figure 1. La lampe a une résistance **r.** la résistance entre **A** et **B** est **R**. lorsque le curseur mobile **C** est au niveau de **B** ;la lampe est éteinte. On déplace doucement le curseur à partir du niveau B jusqu'à la position où la lampe est s'allume. La résistance entre **A** et **C** est alors **xR**$(0 \leq x \leq 1)$. *On donne* : $r = \frac{R}{2} = 1\Omega$ *et* $x = 0.5$

1°- En appliquant les lois de **kirchhoff** ; déterminer les courants dans les différentes branches en fonction de **E** ; **x** ; **r** et **R** et calculer les valeurs de ces courants.

2°- Quelle est la valeur de la **d.d.p**. **U** aux bornes de la lampe ? Exprimer **U** en fonction de **E** ; **x** ; **r** et **R**

3°- En déduire la valeur de **E** .

4°- En comparant **E** et **U** ; quel le role de ce montage ?

5°- Calculer la puissance fournie
P_f *par le générateur et la puissance perdue* P_r *dans la*lampe . Comparer
P_f et P_r *et canclure.*

6°- Par application du théorème de Thevenin ; trouver le courant **I'** traversant la deuxième lampe.

7°- Déterminer la valeur de **I'**.

8°- Les lampes seront-elles allumées ou éteintes ? justifier votre réponse.

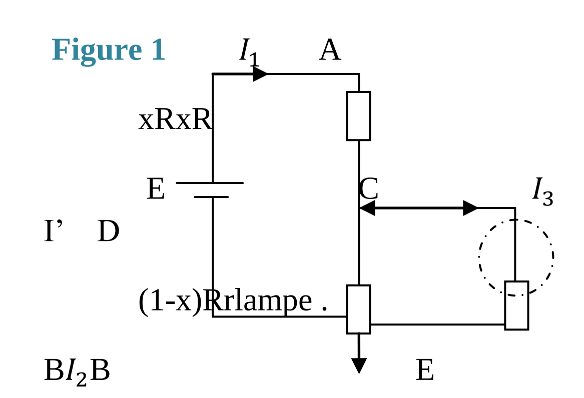


Figure 1
I_1
A
xRxR
E
C
I_3
I’
D
(1-x)Rrlampe .
BI_2B
E

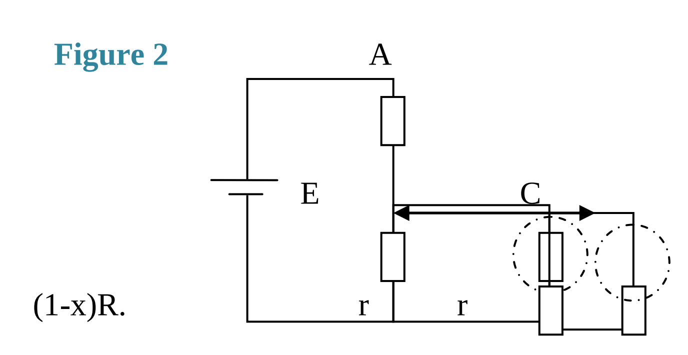
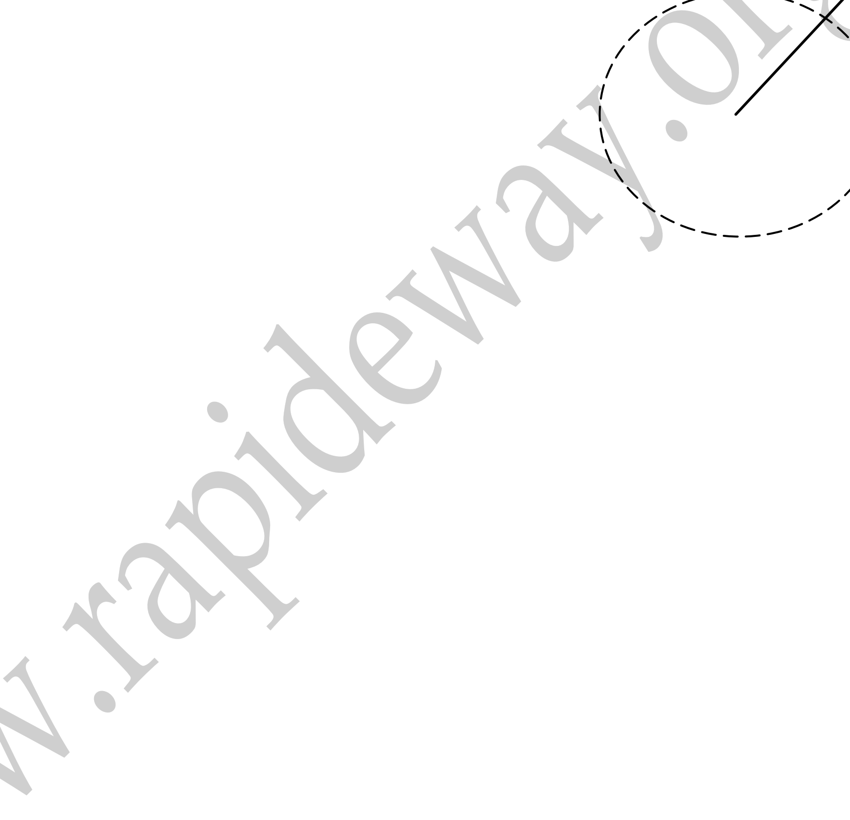


Figure 2
A
E
C
(1-x)R.
r
r



Corrigés Contrôle 2 Electricité 1: SMP-SMC 2006/2007

Exercice I :

1/ le potentiel V de conducteur

M O R r Sg

Le conducteur possede une symétrie sphérique

Donc $\vec{E}$ est porté par $\vec{er}$ et ne dépend que de r

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r)\,\vec{er}$$

Surface de Gauss ,$\emptyset = \oiint_{Sg} E(r)\,\vec{er} \cdot dS\,\vec{er} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ avec $Q_{int} = Q$

$$\Rightarrow E(r).S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

On a $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow E(r)\,\vec{er} = -\frac{dV}{dr}\vec{er} \Rightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E(r)dr$

$$\Rightarrow V = \int \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Comme le conducteur en équilibre $V_{int} = cot$

Pour r=R on a $\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$

2/ la capacité C

On a C $= \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$

3/calculons R pour C= 1F

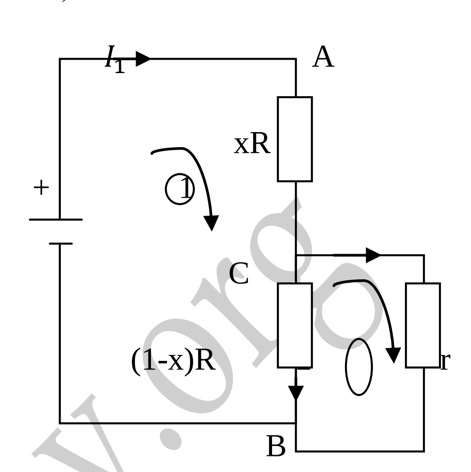
On a C $= 4\pi\varepsilon_0 R = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ avec $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}\,(M.KSA)$

A.N $R = \frac{1}{4\pi\cdot\frac{1}{36\pi}\cdot 10^{-9}} \Rightarrow R = 9 \cdot 10^{-9}\,m \approx 0;9\,A°$

4/ physiquent cette capacité n'est pas réalisable à cause de dimention du rayon R est très petit

Exercice II :

1/ Application des lois de kirchoff (loi des nœuds et loi des mailles)



- Loi des nœuds

  Nœud c $\rightarrow$ $I_1 = I_2 + I_3$

  $\Rightarrow I_1 - I_2 - I_3 = 0$ (1)

- Loi des mailles

  I_3

  Dans le circuit il ya deux mailles indépendantes E

  *maille (1). $-E + xRI_1 + (1-x)RI_2 = 0$

  $\Rightarrow xR\, I_1 + (1-x)R\, I_2 = +E$ (2)

  I_2

  *maille (2). $rI_3 - (1-x)RI_2 = 0$ (3)

Les relation (1) ; (2) et (3) forment le systémesuivant .

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ xRI_1(1-x)RI_2 + 0 = E \\ 0 - (1-x)RI_2 + rI_3 = 0 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ xR & (1-x)R & 0 \\ 0 & -(1-x)R & r \end{vmatrix}$$

$$\Delta : \ \textit{le déterminant associé au systéme}$$

Donc $\quad I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} \quad ; \quad I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} \quad ; \quad I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta}$

Avec $\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E & (1-x)R & 0 \\ 0 & -(1-x)R & r \end{vmatrix}$; $\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ xR & E & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{vmatrix}$ $et\ \Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ xR & (1-x)R & E \\ 0 & -(1-x)R & 0 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ xR & (1-x)R & 0 \\ 0 & -(1-x)R & r \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} (1-x)R & 0 \\ -(1-x)R & r \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} xR & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} xR & (1-x)R \\ 0 & -(1-x)R \end{vmatrix}$$

$$= r(1-x)R + xRr + x(1-x)R^2$$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E & (1-x)R & 0 \\ 0 & -(1-x)R & r \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} (1-x)R & 0 \\ -(1-x)R & r \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} E & (1-x)R \\ 0 & -(1-x)R \end{vmatrix}$$

$= \boxed{Er + E(1-x)R}$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ xR & E & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} xR & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} xR & E \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = Er$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ xR & (1-x)R & E \\ 0 & -(1-x)R & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} (1-x)R & R \\ -(1-x)R & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} xR & E \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} xR & (1-x)R \\ 0 & -(1-x)R \end{vmatrix}$$

$= \mathrm{E}(1-x)R$

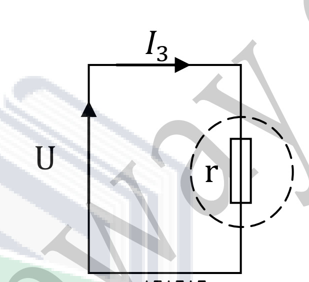
Pour I_1 : $on\ a\ I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{Er+E(1-x)R}{r(1-x)R+xRr+x(1-x)R^2} = \frac{E(r+R-xR)}{rR+xR^2-x^2R^2}$

Pour I_2 $on\ a\ \ I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{Er}{r(1-x)R+xRr+x(1-x)R^2} = \frac{Er}{rR+xR^2-x^2R^2}$

Pour I_3 $on\ a\ \ I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta} = \frac{E(1-x)R}{r(1-x)R+xRr+x(1-x)R^2} = \frac{E(1-x)}{r+x-x^2}$

2/la valeur de la ddp U au bornes de la lamp

$U = rI_3$



$$\Rightarrow U = \frac{rE(1-x)}{r(1-x)+xr+x(1-x)}$$

$\Rightarrow U = \frac{rE(1-x)}{r+x-x^2}$

3/ d'après (2) $\qquad E = \frac{U(r+x-x^2)}{r(1-x)}$

A.N $\quad E = \frac{12(1+0.5-(0.5)^2)}{1(1-0.5)} \Rightarrow E = 30V$

4/ $E = 30V > U = 12V \quad le\ montage\ jeut\ le\ role$

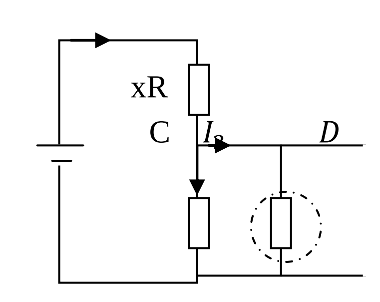
5/ la puissance fourmi par le générateur

$$P_f = EI_1^2 \quad ; \quad I_1 = \frac{30(1+2-0.5*2)}{1*2+0.5*4-0.25*4} = 20A \Rightarrow P_f = 30*(20)^2 = 12\ KW$$

$$P_r = U*I_3 = r*{I_3}^2 \quad ; \quad avec\ \ I_3 = \frac{30(1-0.5)}{1+0.5-0.25} = 12A \Rightarrow P_r = 12*(12)^2 = 1728\ W$$

$$P_f - P_r = 10272 \Rightarrow 85\%\ perdu\ dans\ la\ branche\ AB\ par\ effet\ joule$$

6/ Application du théoréme de theveninI_1 $\quad A$

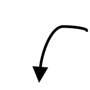


- On enléve la $2^{éme}lampe$
- Tension de theveninE_{Th}

  $E_{Th} = (V_0 - V_E)_{à\ vide} = rI_3I_2$

  $avec\ \ I_3 = \frac{E(1-3)}{r+x-x^2}(1-x)R\mathrm{r}$

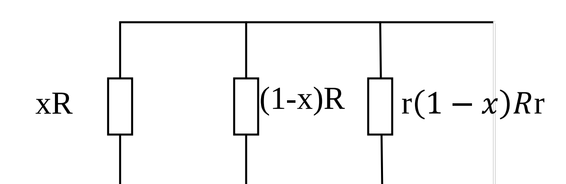
$\Longrightarrow \; E_{Th} = \frac{rE(1-x)}{r+x-x^2}$ B E



- Résistance de theveninR_{Th}

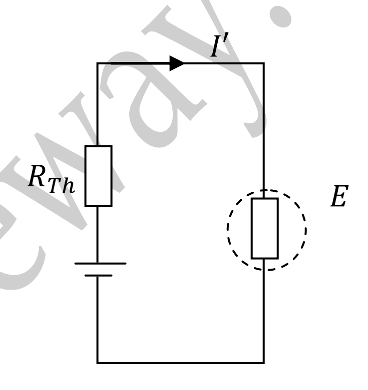
  On court-circuite le générateur E

xR



$$R_{Th} = (xR) \,//\, (1-x)R \,//\, r = \frac{xR(1-x)R}{xr+(1-x)R} \,//\, r$$

$= x(1-x)R \,//\, r = \frac{r(1-x)xR}{r+(1-x)xR}$



- On remet la branche enleveé

  $-E_{Th} + R_{Th}I' + rI' = 0R_{Th}$

  $\Longrightarrow I' = \frac{E_{Th}}{R_{Th}+r}$ ↻r

  E_{Th}

  $\Longrightarrow I' = \frac{\frac{rE(1-x)}{r+x-x^2}}{\frac{r(1-x)xR}{r+(1-x)xR}+r}$

$$= \frac{rE(1-x)}{r+x-x^2} \cdot \frac{r+(1-x)xR}{r[(1-x)xR + r + (1-x)xR]}$$

$$I' = \frac{(1-x)(E+xR)+r}{r+x+x^2(2(1-x)xR+r)} \Longrightarrow I' =$$

8/ les 2 lampes seront allumeé car la tension au sa bornes égale à 12V 4

Contrôle 2 d'électricité 1 SMPC & SMA 2008-2009

Exercice I :

Soit le montage de la figure 1 avec les générateurs (E_1, r_1), (E_2, r_2) et (E_3, r_3) et X une résistance.

1) Calculer les intensités des courants I_1 et I_2
2) Calculer le courant I dans la résistance X :
   a) par application du théorème de superposition
   b) par application du théorème de Thevenin

Exercice II

Soient deux sphères S_1 et S_2 concentriques conductrices, placées dans le vide (voir figure 2) . S_1 est pleine de rayon R_1, S_2 est creuse et infiniment mince de rayon R_2 (R_{2i}=R_{2e}=R_2)

1) S_1 et S_2 sont reliées par un fil conducteur et portées au potentiel V, calculer les charges Q_1 de la sphère S_1, Q_{2i} de la face interne de S_2 et Q_{2e} de la face externe de S_2
2) Le fil est maintenant rompu ; S_1 est portée au potentiel V_1 et S_2 est portée au potentiel V_2 tels que $V_1 \neq V_2$. Donner les charges Q'_1 , Q'_{2i} et Q'_{2e} en fonction de R_1 ,R_2,V_1 et V_2
3) En déduire la capacité du condensateur ainsi formé.

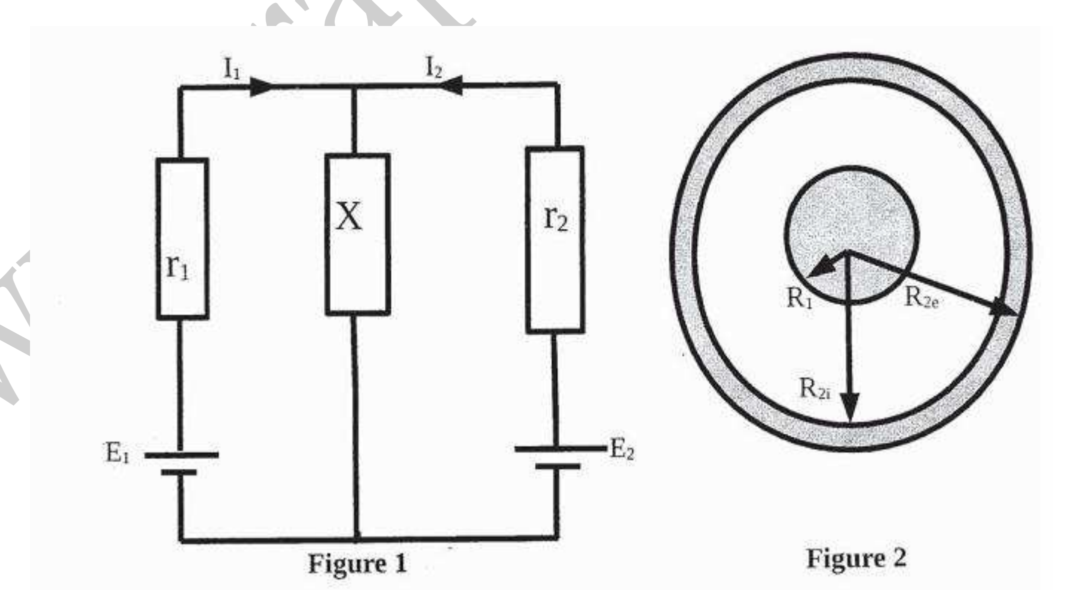


Figure 1

Figure 2

Corrigés Contrôle 2 d'électricité 1 SMPC & SMA 2008-2009 :

Exercice I :

1°/ Calculons I_1 et I_2

- Pour I_1 et I_2

➢ Les lois de Nœuds

Nœud A : $I_1 + I_2 = I$

NœudB : $I_1 + I_2 = I$ (meme equation)

$\Longrightarrow$: $I_1 + I_2 - I = 0$

➢ Lois des mailles

Dans le circuit il y a deux mailles indépendantes (I) et (II)

- Maille (I) :

$$-E_1 + r_1 I_1 + XI = 0 \Longrightarrow r_1 I_1 + XI = E_1 \qquad (2)$$

- Maille (I) :

$$-E_2 + r_2 I_2 + XI = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r_2 I_2 + XI = -E_2 \qquad (3)$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I = 0 \\ r_1 I_1 + 0 + XI = E_1 \\ 0 + r_2 + XI = E_2 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ r_1 & 0 & X \\ 0 & r_2 & X \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 0 & X \\ r_2 & X \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} r_1 & X \\ 0 & X \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{vmatrix} = -r_2X - r_1X - r_1r_2$$

$$= -[X(r_1 + r_2) + r_1r_2]$$

- Pour $I_1 . I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta}$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ E_1 & 0 & X \\ E_2 & r_2 & X \end{vmatrix} = -1(E_1X - E_2X) - E_1E_2 = -[X(E_1 + E_2) + E_1E_2]$$

$$\Longrightarrow I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{X(E_1+E_2)+E_1E_2}{X(r_1+r_2)+r_1r_2}$$

- Pour $I_2 . I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta}$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ r_1 & E_1 & X \\ 0 & E_2 & X \end{vmatrix} = XE_1 - XE_2 - r_1E_2 = X(E_1 - E_2) - r_1E_2$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{X(E_1 - E_2) - r_1E_2}{-[X(r_1 + r_2) + r_1r_2]}$$

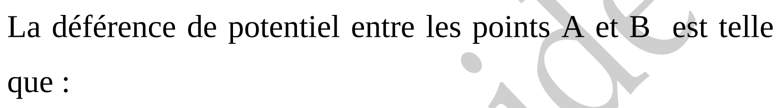
$$I_2 = \frac{X(E_2 - E_1) + r_1E_2}{X(r_1 + r_2) + r_1r_2}$$

2°/-Calculons I le courant dans la résistance X

a-théorème de superposition

$I = i_1 + i_2$ Les intensités des courants i_1 et i_2 se calculent à partir des états 1 et 2.

Etat 1 : On considère le premier générateur E_1débite un courant d'intensité dans l'ensemble de résistances X et r_2 en parallèle.



La déférence de potentiel entre les points A et B est telle que :

$V_A - V_B = Xi_1 i_1 \Longrightarrow \frac{V_A - V_B}{X}$

$*V_A - V_B = I_1' *(X//r_2)$

$=I_1' \frac{Xr_2}{X+r_2}$

-D'après la loi de Pouillet : on a

$I_1' = \frac{E_1}{r_1+(X/r_2)} = \frac{E_1}{r_1+\frac{xr_2}{r_2+X}}$

-ou bien la maille (I) donne $r_1 I_1' + I_1'(X//r_2) - E_1 = 0$

$(r_1 + (X//r_2))I_1' = E_1$ avec $X//r_2 = \frac{Xr_2}{r_2+X}$

Finalement :

$$I_1' = \frac{E_1}{r_1 + \frac{Xr_2}{r_2+X}}$$

Donc :

$$V_A - V_B = I_1' * \frac{Xr_2}{X + r_2} = \frac{E_1}{r_1 + \frac{Xr_2}{r_2+X}} * \frac{Xr_2}{X + r_2}$$

$$= \frac{E_1.X.r_2}{r_1r_2 + X(r_1 + r_2)}$$

Donc :

$$i_1 = \frac{V_A - V_B}{X} = \frac{1}{X} \times \frac{E_1.X.r_2}{r_1r_2 + X(r_1 + r_2)}$$

Finalement :

$$i_1 = \frac{E_1.r_2}{r_1r_2 + X(r_1 + r_2)}$$

Etat 2 : le générateur E_2 fonctionne seul le générateur E_2 débite un courant d'intensité I_2' dans l'ensemble de résistance r_1 et X en parallèle.

La d.d.p entre les deux points A et B est telle que :

$$V_A - V_B = Xi_2 i_2 = \frac{V_A - V_B}{X}$$

- $V_A - V_B = I_2' \times (r_1//X)$

$$= I_2' \times \frac{r_1X}{r_1+X}$$

- Pour I_2'

La maille (I) → $(r_1//X) \times I_2' - E_2 + r_2I_2' = 0$ avec $r_1//X = \frac{r_1X}{r_1+X}$

$$I_2' = \frac{E_2}{r_2 + \frac{r_1X}{r_1+X}} = \frac{E_2 \times (r_1 + X)}{r_1r_2 + X(r_1 + r_2)}$$

Donc :

$$i_2 = \frac{I_2'}{X} \times \frac{r_1X}{r_1 + X} = \frac{E_2 \times (r_1 + X) \times r_1}{[(r_1r_2 + X(r_1 + r_2)] \times (r_1 + X)}$$

-Finalement

$$i_2 = \frac{E_2 \times r_1}{r_1r_2 + X(r_1 + r_2)}$$

b°/-Application du théorème de Thevenin

- On élève la résistance X et on calcule la d.d.p$V_A - V_B$ à vide

- Tension de TheveninEth

$Eth = V_A - V_B$à vide

$=E_1 - r_1 I'$

Ou

$Eth = V_A - V_B$à vide

$=E_2 + r_2 I'$

- Le courant I' est donné par la loi de Pouillet :

$$I' = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2}$$

- Ou bien

La maille (I) → $-E_1 + r_1 I' + r_2 I' + E_2 = 0$

C.à.d.$I' \times (r_1 + r_2) = E_1 - E_2$

$$I' = \frac{E_1 - E_2}{(r_1 + r_2)}$$

Donc

$$Eth = E_2 + r_2 \times \frac{E_1 - E_2}{(r_1 + r_2)}$$

Donc

$$Eth = \frac{E_2 r_1 + E_2 r_2 + r_2 E_1 - r_2 E_2}{r_1 + r_2} = \frac{E_2 r_1 + r_2 E_1}{r_1 + r_2}$$

- Resistance de TheveninR_{th}

On court-circuite les générateurs E_1 et E_2

$R_{th} = r_1 // r_2 = \frac{r_1 . r_2}{r_1 + r_2}$

- On remet la résistance X enlevée

  Maille (I) :

$$XI - E_{th} + R_{th}I = 0$$

Donc

$$I = \frac{E_{th}}{X + R_{th}} = \frac{\frac{E_2 r_1 + r_2 E_1}{r_1 + r_2}}{X + \frac{r_1 . r_2}{r_1 + r_2}}$$

-Finalement

$$I = \frac{E_2 r_1 + r_2 E_1}{X(r_1 + r_2) + r_1 . r_2}$$

Exercice II

1°/- lorsqu'on relie (S_1) et (S_2) par un fil conducteur on a qu'un seul conducteur en équilibre.

Toute la charge est répartie sur la surface extérieure de rayon $R_{2e} = R_2$

- à l'intérieur, il n a pas de charge donc : $Q_1 = 0$ et $Q_{2i} = 0$
- Toute la charge est répartie sur la surface de rayon R_{2e} cette charge Q_{2e} qui crée le potentiel V du conducteur.
- La distribution admet une symétrie sphérique donc le potentiel à l'extérieur est le même que celui crée par la charge Q_{2e} placée au centre O.

- Pour $r > R_{2e}$

$$V(r) = \frac{Q_{2e}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Pour r=$R_{2e} = R_2$

$$V(r = R_2) = V = \frac{Q_{2e}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Donc $Q_{2e} = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V$

-Finalement

$$\begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_{2i} = 0 \\ Q_{2e} = 4\pi\varepsilon_0 r_2 V \end{cases}$$

2°/-

Les deux conducteurs sont en influence total donc : $Q'_{2e} = -Q'_1$

A l'extérieur :

- La distribution admet une symétrie sphérique donc $\vec{E}= E(r)\vec{e_r}$
- Surface de Gauss : la sphère de rayon r et de centre O.
- Théorème de Gauss :

$\emptyset = \oiint E(r)\vec{e_r}.ds\vec{e_r}=\frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$E.S_g = \frac{Q'_1 - Q'_1 + Q'_{2e}}{\varepsilon_0}$$

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q'_{2e}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q'_{2e}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

❖ $E = -\frac{dV}{dr} \Longrightarrow dV = -Edr = -\frac{Q'_{2e}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$

$V = \frac{Q'_{2e}}{4\pi\varepsilon_0 r}$ +C avec ($V(\infty) = 0$ ==> $C = 0$)

- Pour $R_{2e} = R_2 \Longrightarrow V_2 = \frac{Q'_{2e}}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \Longrightarrow Q'_{2e} = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V_2$
- Pour $R_1 < r < R_2$

$$\emptyset = ES = \frac{Q'_1}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E.4\pi r^2 = \frac{Q'_1}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q'_1}{4\pi r^2\varepsilon_0}$$

On a $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V \Longrightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Longrightarrow dV = -Edr$

$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q'_1}{4\pi r^2\varepsilon_0} \Longrightarrow V_2 - V_1 = \frac{Q'_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right] = \frac{Q'_1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$

Donc $Q'_1 = 4\pi\varepsilon_0(V_1 - V_2) \times \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

Alors

$$Q'_{2i} = -Q'_1 = -4\pi\varepsilon_0(V_1 - V_2) \times \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

3°/- par définition on a

$$C = \frac{Q'_1}{V_1 - V_2} \Longrightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 \times \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Exercice

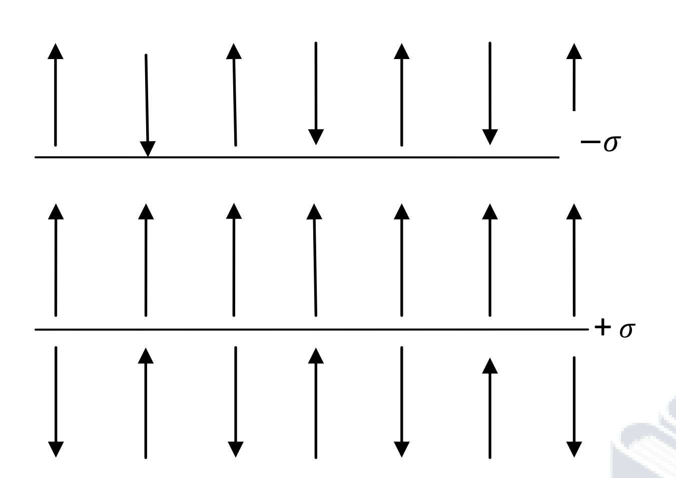
Exercice 1 :

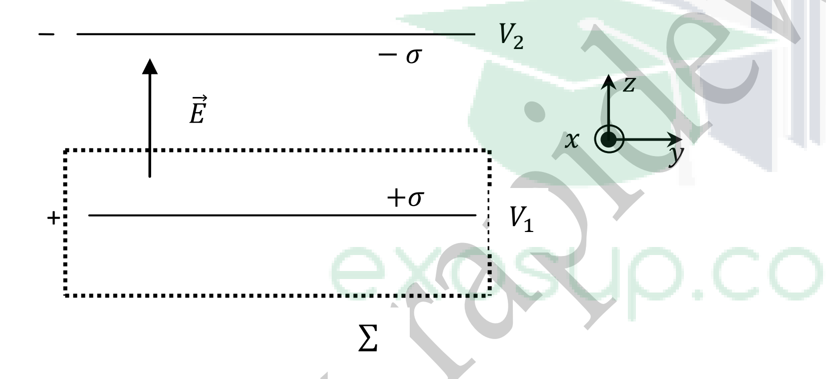
1. Un condensateur plan est constitué de deux armatures A et B planes, de surface S et séparées par une distance e .
2. Déterminer la capacité da ce condensateur.
3. Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique constitué de deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_1$) et de hauteur h.
4. Calculer la capacité d'un condensateur sphérique constitués de deux sphères concentrique de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$).

Corrigés de l'Exercice :

1. Condensateur plan

On néglige les effets de bord.





Tout plan perpendiculaire aux armatures est un plan de symétrie. Le champ $\vec{E}$ étant contenu dans ces plans, celui-ci est perpendiculaire aux plaques. Le champ est invariant par translation le long des axes Ox et Oy. Le champ électrostatique ne dépend que de Z.

$$\vec{E} = \mathrm{E(z)}\ \vec{e_z}$$

Les lignes de champ sont parallèles entre les deux armatures, par conséquent, le champ $\vec{E}$ est uniforme.

$$\vec{E} = E_{+\sigma} + E_{-\sigma} = \frac{\sigma}{2\tau} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_z}$$

— Circulation du champ électrostatique :

$$\int_{V_2}^{V_1} \vec{E}.\vec{dl} = V_1 - V_2 \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$$

— Expression de la capacité :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma_S}{V_1 - V_2}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0}{e} S$$

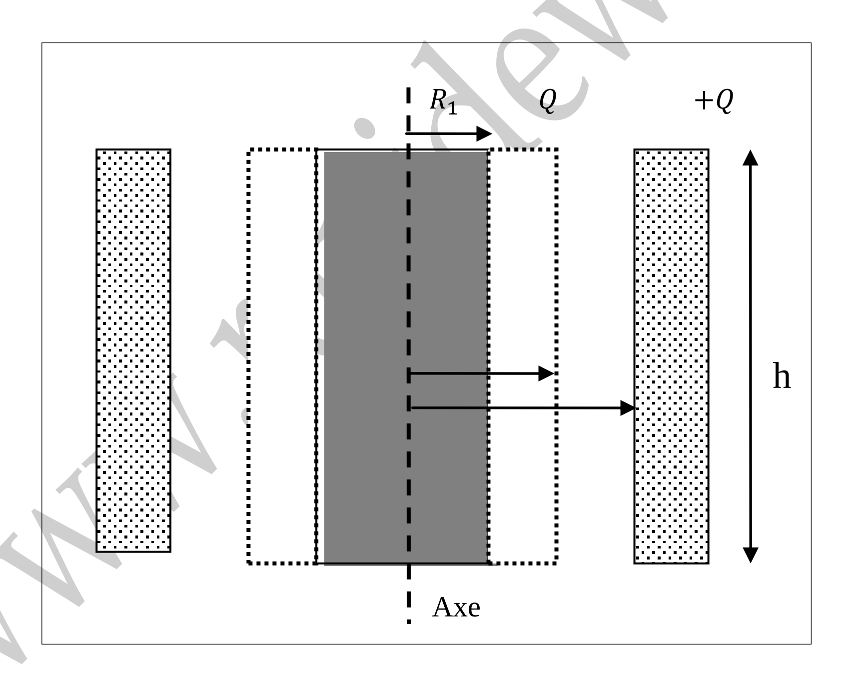
2. Condensateur cylindrique **:**

Soient deux cylindres infinis coaxiaux de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$.

L'armature interne porte la charge Q .

Le champ $\vec{E}$ est par raison de symétrie, radial (voir chapitre 1), on ne considère donc que la surface latérale du cylindre, le flux sortant par les bases étant nul.

Vue en coupe du cylindre



— Théorème de Gauss

On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon r (r >R_1) et de hauteur h.

$$\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E.\ 2\pi rh = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi rh\varepsilon_0}$$

— Circulation du champ électrostatique

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dr} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi h\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

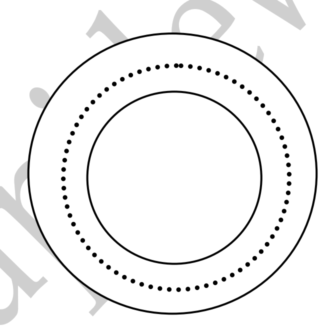
$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi h\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

On en déduit C : $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$

$$C = \frac{2\pi h\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

3. Condensateur sphérique

Soit un condensateur formé par deux sphères concentrique de rayons R_1 et R_2 avec $R_2 > R_1$.



L'armature interne porte la charge + Q.

Le système possède la symétrie (voir chapitre 1) le champ électrostatique est donc radial.

Théorème de Gauss :

On choisit comme surface de Gauss, une sphère de rayon r.

$$\oiint_S \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{avec} \quad Q_{int} = Q$$

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

— Circulation du champ électrostatique :

$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_1} \vec{E}.\overrightarrow{dr} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. dr

$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$

— Expression de la capacité :

$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$

$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

Optique Géométrique :

Contrôle 2 optiques géométriques : SMP-SMA-SMC 2004

EXERCICE I :

On considère un dioptre sphérique concave de sommet S, de centre C et de rayon $R = |\overline{SC}| = 4cm$, séparant deux milieux homogènes transparents d'indices $n_1 = 1.5$ et $n_2 = 1$.

1/
a) Donner dans les conditions de Gauss, l'expression de la relation de conjugaison du dioptre sphérique, avec origine au centre C. quelle est la nature de ce dioptre sphérique?
b) Rappeler la relation du grandissement transversal en fonction de $\overline{CA}$ et $\overline{CA'}$.

2/ Donner la définition des plans principaux objet π et image π'.montrer que les points principaux objet H et image H'du dioptre sphérique sont confondus avec S.

3/ Déterminer les foyers principaux objet F et image F'(on demande $\overline{CF}$ et $\overline{CF'}$).

4/ Etablir la relation entre a distance focale objet f, la distance focale image f', n_1 et n_2

5/ Ce dioptre donne d'un objet réel AB de hauteur 1 cm placé sur l axe optique, une image virtuelle $A'B'$droite de hauteur 2 cm. Déterminer la position de l'objet $\overline{CA}$ et celle de l'image $\overline{CA'}$.

6/ Faire une construction géométrique a l'échelle $1/2$

EXERCICE II :

Soit une lentille mince convergente, de centre optique O, de foyer F et F' et de convergence $C = 20\ dioptries$.

1/ Ou doit – on placer un objet réel AB pour obtenir une image $A'B'$ droite quatre fois plus grande que l'objet ?

2/ Cette lentille est destinée à servir d'une loupe pour observer un objet AB proche de petite taille. L'œil d'observation étant normal et placé en un point O'au voisinage du foyer image F'sur l'axe optique de la lentille.
a) S'agit – dans ce cas d'un instrument objectif ou subjectif ? justifier votre réponse.
b) Donner l'expression de la puissance P de la loupe en fonction de f. la position du foyer image F'et celle de l'image $A'B'$ par rapport a l'œil placé en O'.
c) Calculer sa puissance intrinsèque et sa latitude de mise au point.

On donne les distances minimale et maximale de vision distincte: $d = 25cm, D = \infty$

EXERCICE III :

On considère un doublet constitué de deux lentilles minces L_1 et L_2 de centre optique O_1 et O_2, de même axe principale et baignant dans l'air. Le doublet a pour symbole (3, 2,1) et pour épaisseur optique $e = \overline{O_1O_2}$

1/ Donner la relation qui f'_1 , f'_2 et e au symbole du doublet.
2/ Sachant que l'épaisseur optique $e = 30mm$, calculer les distances focales images f'_1etf'_2.
3/ Déterminer par calcule les positions des points cardinaux du doublet :F, F', H et H' (on donnera $\overline{F_1F}, \overline{F'_2F'}, \overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$).
4/ Construire géométriquement les points cardinaux puis mesurer les grandeurs algébriques : $\overline{F_1F}, \overline{F'_2F'}, \overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$. comparer aux résultats obtenus en 3/.

Corrigés Contrôle 2 optiques géométriques : SMP-SMA-SMC 2004

:

EXERCICE I :

$$R = |\overline{SC}| = 4cm\,, n_1 = \frac{3}{2}\,, n_2 = 1$$

1.

a. $A \xrightarrow{DS} A'$

objet — image

Formule de conjugaison d'un dioptre sphérique : $\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$

- $c \in$ au milieu plus réfringent ⇒dioptre convergent.

b. $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$:grandissement transversale.

2.

- Le plan principal objet est le lien d'intersection des incidents passant par F et leurs émergents correspondants.
- Le plan principal image est le lieu des points d'intersection d'incident ∥ à l'axe optique et leurs émergents correspondants.

Les deux plans principaux objet et image sont ⊥ à l'axe optique pour lequel $\gamma = 1$

- $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = 1 \Rightarrow \overline{CA'} = \overline{CA}$ $\quad H \longrightarrow H'$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{\overline{CH'}} - \frac{n_2}{\overline{CH}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \qquad \overline{CH'} = \overline{CH} \Rightarrow \frac{n_1 - n_2}{\overline{CH}}$$

$$= \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow H \equiv S$$

De même on remplace CH par $CH'(CH = CH')$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{\overline{CH'}} - \frac{n_2}{\overline{CH'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow \frac{n_1 - n_2}{\overline{CH'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow H' \equiv S$$

Donc $H' \equiv S \equiv H$

3. Position des foyers : F et F'

- Pour un objet Asitué a F ($A \equiv F$) $\xrightarrow{DS}$ l'image A'sera a l'infini

$\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$ Pour $A \equiv F \Rightarrow 0 + \frac{n_2}{\overline{CF}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow \overline{CF} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}.\overline{CS}$ $\quad AN: \overline{CF} = -8cm$

- Si l'objet A poser à l'infini son image A'a travers DS sera au foyer image $A' \equiv F'$

$$\frac{n}{\overline{CF'}} + 0 = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow \overline{CF'} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{CS} \qquad AN : \overline{CF'} = +12cm.$$

4. Relation entre la distance focale objet f et la distance focale image f'.

$$\overline{CF} = \overline{CS} + \overline{SF} \Rightarrow \overline{SF} = f = \overline{CF} - \overline{CS} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}\overline{CS} - \overline{CS}$$

$$\overline{SF} = \overline{CS}\left(\frac{n_2}{n_2 - n_1} - 1\right)$$

Soit $f = \frac{n_1}{n_2 - n_1}.\overline{CS}$

$$CF' = \overline{CS} + \overline{SF'} \Longrightarrow \overline{SF'} = f' = \overline{CF'} - \overline{CS} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{CS} - \overline{CS} = \overline{CS}\left(\frac{n_1}{n_1 - n_2} - 1\right)$$

Soit $f' = \frac{n_2}{n_1 - n_2}\overline{CS}$

On fait le rapport de f'par $f \quad \Leftrightarrow \frac{f'}{f} = -\frac{n_2}{n_2}$

5. La position de l'objet $\overline{CA}$ et de l'image $\overline{CA'}$

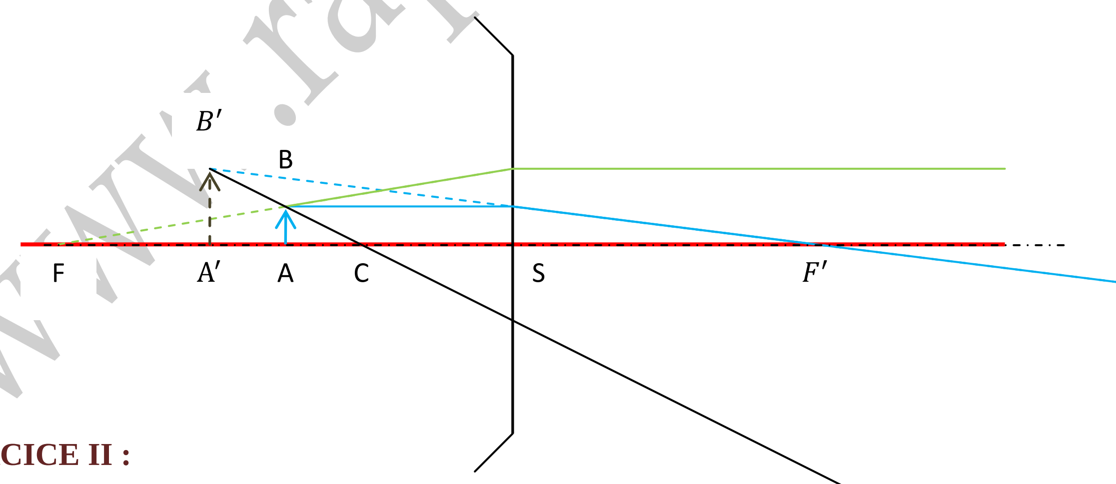
On a $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = 2 \Rightarrow \overline{CA'} = 2\overline{CA}$

On a $\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow \frac{n_1}{2\overline{CA}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$

$$\frac{1}{\overline{CA}}.\frac{(n_1 - 2n_2)}{2} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \quad \Rightarrow \overline{CA} = \frac{(n_1 - 2n_2)}{2(n_1 - n_2)}\overline{CS}$$

$$AN : \overline{CA} = -2cm, et\ \overline{CA'} = 2\overline{CA} = -4cm$$

6. Construction geométrique :



EXERCICE II :

$$C = 20\delta \Rightarrow f' = \frac{1}{C} \; AN : f' = 5cm.$$

1. Objet réel AB ⟶ image $A'B'$ droit.
   $A'B'$ Droit $\Longrightarrow \gamma > 0$
   $A'B'$ Plus grand 4fois de l'objet $\Longrightarrow \overline{A'B'} = 4.\overline{AB}$

Donc $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 4$

On a $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 4 \Longrightarrow OA' = 4\overline{OA}$

Or :$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Longrightarrow \frac{1}{4\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Longrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{4}f'$

AN : $\overline{OA} = -3{,}75cm$

2.

a. Comme l'objet est proche et réel et donne une image virtuelle alors cet instrument est subjectif.

b. La puissance P de la loupe.

$$P = \frac{1}{f'}\left(1 - \frac{\overline{O'F'}}{\overline{O'A'}}\right)$$

c. La puissance intrinsèque P_i

$P_i = \frac{1}{f'}$ AN : $P_i = 20\delta = 20m^{-1}$

Latitude de mise au point de la loupe.

$$\overline{A_1A_P} = f'^2\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right)$$

AN : $d = 25cm, D \longrightarrow \infty$

$$\Longrightarrow \overline{A_1A_P} = 1cm$$

EXERCICE III :

1. Relation entre f_1', e, f_2':
   Le doublet a pour symbole (3, 2,1)

$$\frac{f_1'}{3} = \frac{e}{2} = \frac{f_2'}{1}$$

2. L'épaisseur $e = 30mm, \overline{O_1O_2} = e = 30mm.$
   - On a $\frac{f_1'}{3} = \frac{e}{2} = \frac{30}{2} = 15 \Longrightarrow f_1' = 45mm$
   - $\frac{f_2'}{1} = \frac{e}{2} \Longrightarrow f_2' = 15mm$
3. Position des points cardinaux du doublet :

$$F, F', H \ et \ H'$$

$$\Delta = -f_1' + e + f_2' \quad AN : \Delta = 30mm.$$

- Foyer F et F'

$$\overline{F_1F} = \frac{f_1f_1'}{\Delta} \Longrightarrow \overline{F_1F} = \frac{(-45).(45)}{(-30)} = 67{,}5mm$$

(Application de formule de newton)

$$\overline{F_2'F'} = \frac{-f_2f_2'}{\Delta} \Longrightarrow \overline{F_2'F'} = \frac{(-15).(15)}{(-30)} = -7{,}5mm$$

- Points principaux H et H'.

$$\overline{HF}=\frac{f_1f_2}{\Delta}\Longrightarrow\overline{HF}=\frac{(-45).(-15)}{(-30)}=-22{,}5mm$$

- $\overline{H'F'}=-\frac{f_1'f_2}{\Delta}=-\overline{HF}\Longrightarrow\overline{HF}=22{,}5mm$

4. Construction géométrique.

Contrôle de l'optique géométrique SMP-SMA-SMC 2006

Exercice I :

On considère un dioptre sphérique de centre C, de sommet S et de rayon $R = |\overline{SC}|$ égale à 2cm. Ce dioptre sépare deux milieux transparents et homogènes d'indices d'entrée n_1 et de sortie n_2 tel que $\frac{n_1}{n_2} = \frac{4}{3}$. La distance focale image de ce dioptre est f'= 6cm.

1- Sachant que le milieu de sortie n_2 est l'air, déterminé n_1.
2- Construire géométriquement ce dioptre sphérique et placer ses foyers objet F et image F'.
3- On place un objet réel AB de hauteur 1cm à 4cm du sommet S du dioptre sphérique.
   a- Déterminer la position $\overline{SA'}$ de l'image A'B'. En déduire sa nature.
   b- Faire une construction à l'échelle unité.
4- Où faut-il placer un objet AB réel, par rapport à S, pour obtenir une image A'B' réelle, renversée et 2 fois plus grande que AB ?

Exercice II :

Un oculaire est constitué par deux lentilles minces L_1 et L_2 de distances focales images respectives $f'_1 = 60mm$ et $f'_2 = 20mm$. La distance O_1O_2 entre leurs centres optiques est $e = 60mm$.

1- Déterminer par construction géométrique (utiliser la feuille graduée) :
   a- Les foyers objet F_{oc} et image F'_{oc} de l'oculaire, on donnera $\overline{F_1F_{oc}}$ et $\overline{F'_2F'_{oc}}$ (F_1 étant le foyer objet de L_1 et F'_2 le foyer image de L_2).
   b- Les points principaux objet et image H'_1 et image H'_{oc} de l'oculaire, on donnera $f_{oc} = \overline{H_{oc}F_{oc}}$ et $f'_{oc} = \overline{H'_{oc}F'_{oc}}$.
2- Utiliser les formules d'association de deux systèmes centrés pour calculer $\overline{F_1F_{oc}}$ et $\overline{F'_2F'_{oc}}$, $f_\infty = \overline{H_{oc}F_{oc}}$ et $f'_{oc} = \overline{H'_{oc}F'_{oc}}$.
3- En déduire la puissance intrinsèque P_{ioc}et le grossissement commercial G_{oc} de cet oculaire.

Exercice III :

On associe un oculaire de distance focale image $f'_{oc} = 30mm$ à un objectif de distance focale image $f'_1 = 2.5mm$ pour constituer un microscope ayant un intervalle optique **Δ**= 18cm.

1- Calculer la puissance intrinsèque P_{ioc}et le grossissement commercial G_{oc}de ce microscope.
2- L'objectif de ce microscope donne d'un point objet A une image située au foyer objet de l'oculaire.
   a- Déterminer le grandissement linéaire Γ_{oc} de cet objectif.

b- Retrouver à partir de Γ_{oc} les valeurs de la puissance intrinsèque P_{ioc} et le grossissement commercial G_{oc} du microscope (on utilisera pour cette question $P_{ioc} = \frac{1}{f'_{oc}}$).

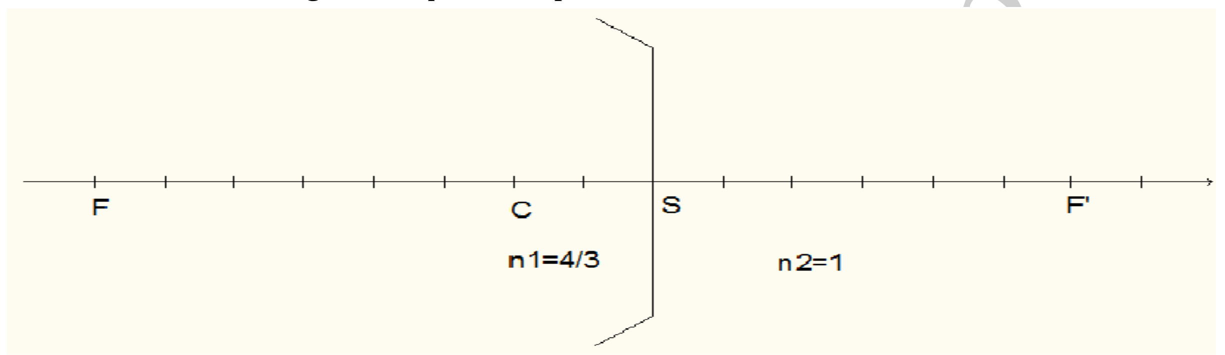
Corrigés de Contrôle de l'optique géométrique SMP-SMA-SMC 2006

Exercice I :

1- On a $\frac{n_1}{n_2} = \frac{4}{3}$ donc $n_1 = \frac{4}{3} n_2$ avec $n_2 = 1$ (air)

D'où $n_1 = \frac{4}{3}$

2- La construction géométrique du dioptre R=2cm et $\overline{SC} = -R = -2cm$



$$\overline{SF'} = f' = 6cm$$

$$\overline{SF} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{SC} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3} - 1} * (-2) = 8cm$$

(A=F implique que A'→ ∞ implique $\frac{n_1}{\overline{SC}} = 0 = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$)

3- $\overline{AB} = 1cm$ réel (SA<0)

a- $\overline{SA} = -4cm$

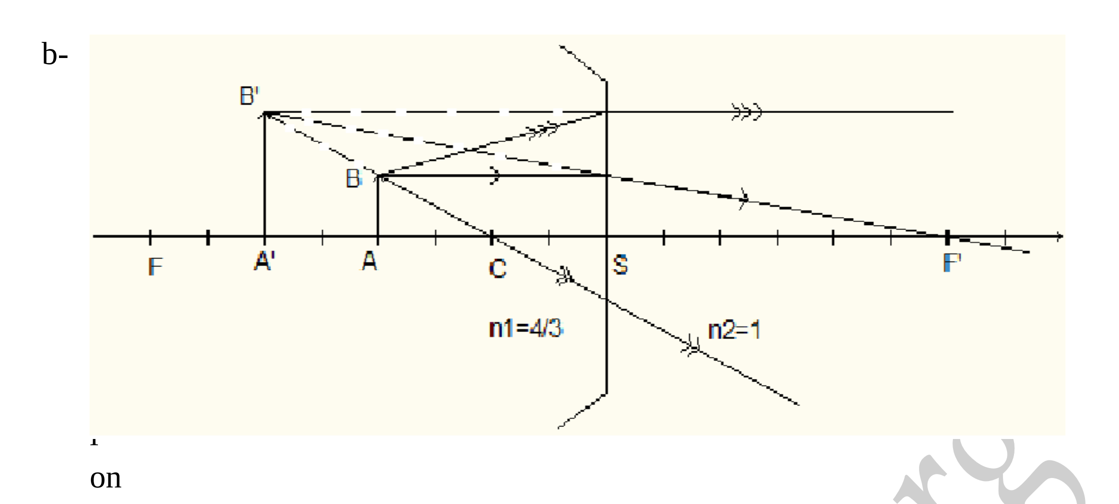
On a $\frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$ implique que $\frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}} + \frac{n_1}{\overline{SA}}$

Et par suite $\frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{(n_2 - n_1)*\overline{SA} + n_1*\overline{SC}}{\overline{SC}*\overline{SA}}$

Alors $\overline{SA'} = \frac{n_2*\overline{SC}*\overline{SA}}{(n_2 - n_1)*\overline{SA} + n_1*\overline{SC}}$

Application numérique $\overline{SA'} = 6cm$

b-



on

4- on a $\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n_1}{n_2} * \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -2(1)$

ET on a $\frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$ (2)

$$\Gamma = \frac{n_1}{n_2} * \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -2 = \frac{4}{3} * \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

Donc $\overline{SA'} = -\frac{6}{4}\overline{SA} = -\frac{3}{2}\overline{SA}$

On remplace dans la relation (2) $\frac{4/3}{\overline{SA}} - \frac{1}{\frac{-3}{2}\overline{SA}} = \frac{1/3}{-2}$

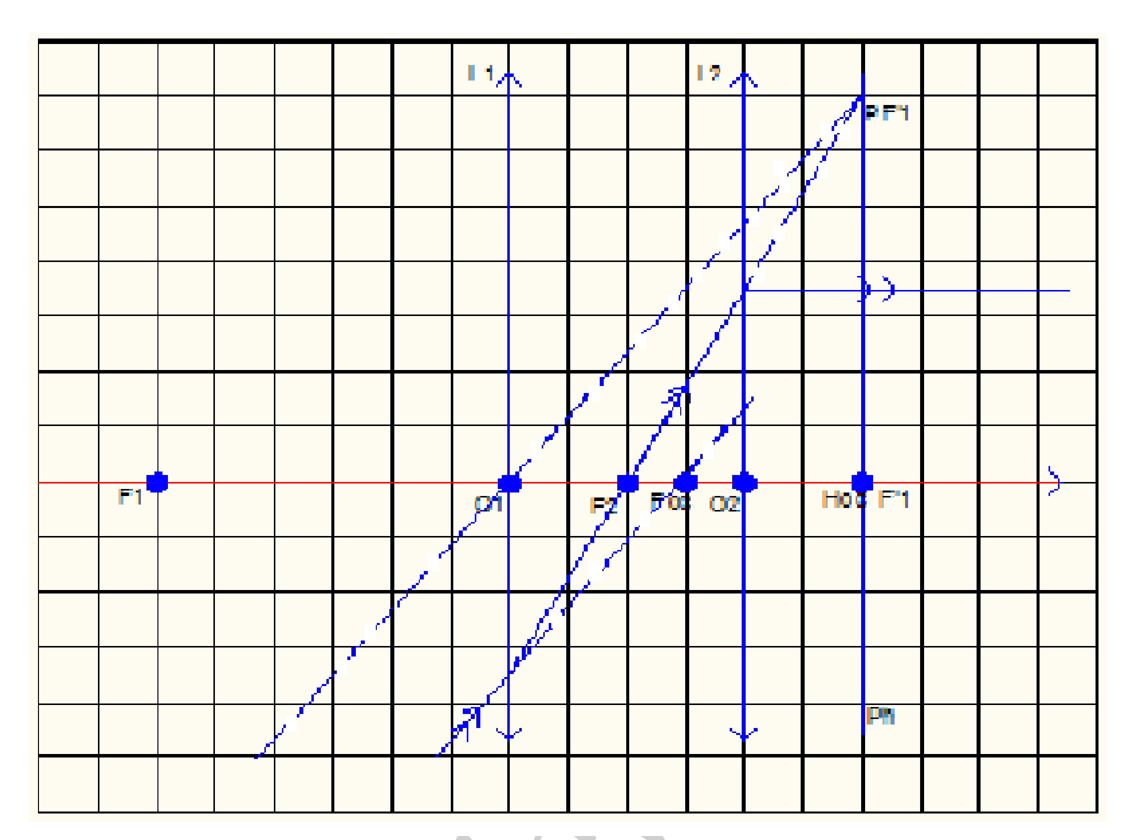
Donc $\frac{1}{\overline{SA}}\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{6}$ d'où $\overline{SA} = -12cm$

L'objet AB à 12cm du sommet S. $\overline{SA} < 0$ Qui donne AB réel.

Exercice II :

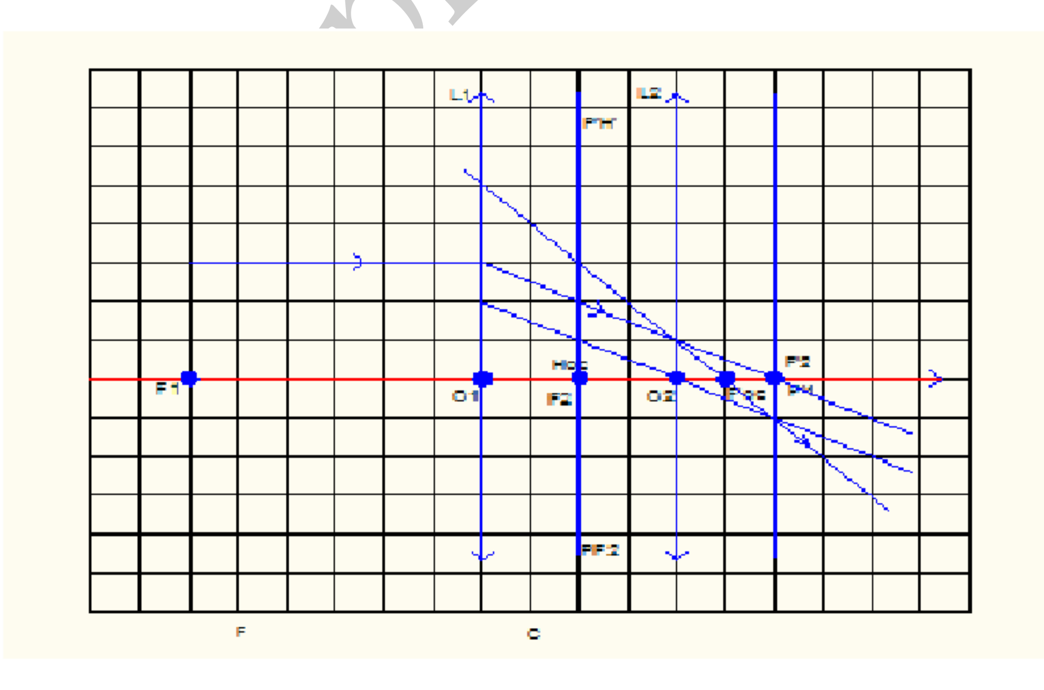
1- La représentation de F_{oc} et de H_{oc}

- L_1, L_2, F_1, F'_1, F_2 et F'_2 la position de F_{oc} et de H_{oc}
- $\overline{F_1 F_{oc}} = +9cm$ et $f_{oc} = \overline{H_{oc} F_{oc}} = -3cm$



2- La représentation de F'_{oc} et de H'_{oc}

- L_1, L_2, F_1,F'_1, F_2et F'_2 la position de F'_{oc} et de H'_{oc}
- $\overline{F'_2F'_{oc}} = -1cm$ Et $f_{oc} = \overline{H'_{oc}F'_{oc}} = +3cm$



N.B : pour les deux figures on pourra considérer que les carreaux de la feuille sont de 1cm de côté, échelle unité.

2- $\Delta = -f'_1 + f_2 + e = -40mm = -4cm$

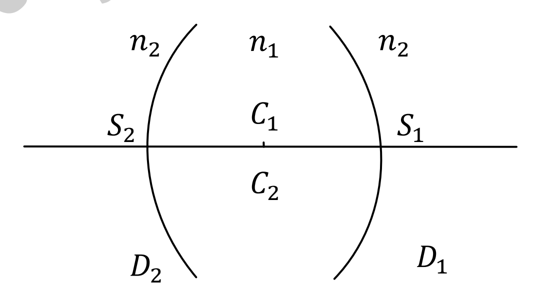
Contrôle II optique géométrique : 2007Filières : SMP-SMA-SMC

Exercice I :

(A traiter dans les conditions de l'approximation de Gauss)

On considère un dioptre sphérique convergent D_1 de sommet S_1 et de rayon $R_1 = 4cm$. Ce dioptre sépare deux milieux homogène et transparent d'indices $n_1 = 1{,}5$ (milieu d'entrée) et $n_2 = 1$ (milieu de sortie).

1. Rappeler la relation de conjugaison ainsi que celle du grandissement linéaire γ pour un dioptre sphérique avec origine au centre.
2. Déterminer la position des foyers objet F er image F' de ce dioptre (On donnera $\overline{CF}$ et $\overline{CF'}$).
3. Ou doit-on placer, sur l'axe principal deD_1, un objet réel AB de hauteur 1 cm pour que son image $A'B'$ a travers ce dioptre soit virtuelle, droite et deux fois plus grande que l'objet ? en déduire la position de l'image. On donnera$\overline{CA}$ et $\overline{CA'}$.
4. Faire une construction géométrique a l'échelle $1/2$.
5. On associe au dioptre D_1 un autre dioptre sphérique D_2 de centre C_2, de sommetS_2 et de rayon $R_2 = R_1 = R$, comme indiquer sur la figure ci-contre.
   a. En utilisant la relation de conjugaison avec origine au centre pour D_1 et D_2, monter que le système optique obtenu est équivalent a une lentille mince ?
   b. En déduire sa distance focale f en fonction de n_1 et R.



Exercice II :

On considère deux lentilles L et L de centre optique O_1 et O_2, placées dans l'aire et ayant même axe optique, tel que$\overline{O_1O_2} = 2cm$. On donne les distances focales images $f_1' = -2cm$.

1. Calculer les distances focales f et f' du système optique équivalent aux deux lentilles L_1 et L_2 (On donnera $\overline{HF}$ et$\overline{H'F'}$). En déduire la nature du système ainsi formé.
2.
   a. Construire géométriquement les positions des foyers objet et image et les positions des points et plans principaux objet et image (On donnera$\overline{F_1F}$,$\overline{F_2'F'}$,$\overline{HF}$ et$\overline{H'F'}$).Utiliser la feuille jointe .
   b. Comparer $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$ a celles de la question 1.

Exercice III :

Le système construit par deux lentilles de l'exercice 2 ci-dessus, forme un oculaire L_{oc} de distance focale image $f'_{oc} = 2cm$, pour un microscope dont l'objectif est une lentille L_{ob} de

distance focale image $f'_{ob} = 5mm$. Ce microscope d'intervalle optique $\Delta_{mic} = 17cm$ est utilisé par un œil d'observation normale placé au foyer image de l'oculaire. Il sert à analyser un objet réel AB placé sur son axe optique devant l'objectif.

1. Construire géométriquement l'image $A'B'$ obtenue a travers ce microscope dans le cas d'une vision a l'infini.
2. Calculer la distance focale f'_{mic} du microscope. En déduire sa puissance pour une mise au point a l'infini.
3. Etablir e calculer le grossissement commercial.

Corrigés de Contrôle II optique géométrique : 2007Filières : SMP-SMA-SMC

Exercice I :

1.

- Relation de conjugaison avec origine au centre pour u dioptre sphérique : $\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1-n_2}{\overline{CS}}$
- Grandissement linaire : $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$

2. Position des foyers principaux.

- Foyer objet

Objet A placé a $F \Longrightarrow l'image\ sera\ a\ l'infini$

$\Longrightarrow 0 - \frac{n_2}{\overline{CF}} = \frac{n_1-n_2}{\overline{CS}} \Longrightarrow \overline{CF} = -\frac{n_2}{n_1-n_2}\overline{CS}$; $\overline{CS} = R > 0$

- Foyer image :
  Objet A a l'infini ⟹l'image confondue avec F'
  $\Longrightarrow \frac{n_1}{\overline{CF'}} = \frac{n_1-n_2}{\overline{CS}}$ Alors : $CF' = \frac{n_1}{n_1-n_2}\overline{CS}$

AN : $R = 4cm$; $n_1 = \frac{3}{2}$; $n_2 = 1$; $\overline{CF} = -8cm.\ et\ \overline{CF'} = +12cm.$

3. On à l'objet AB réel donne une image droite et deux fois plus grande que l'objet

$\gamma = 2 = \frac{A'B'}{AB} > 0\ or\ A'B' > 0 \Longrightarrow AB = +cm.$

$$\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = 2 \Longrightarrow \overline{CA'} = 2\overline{CA}$$

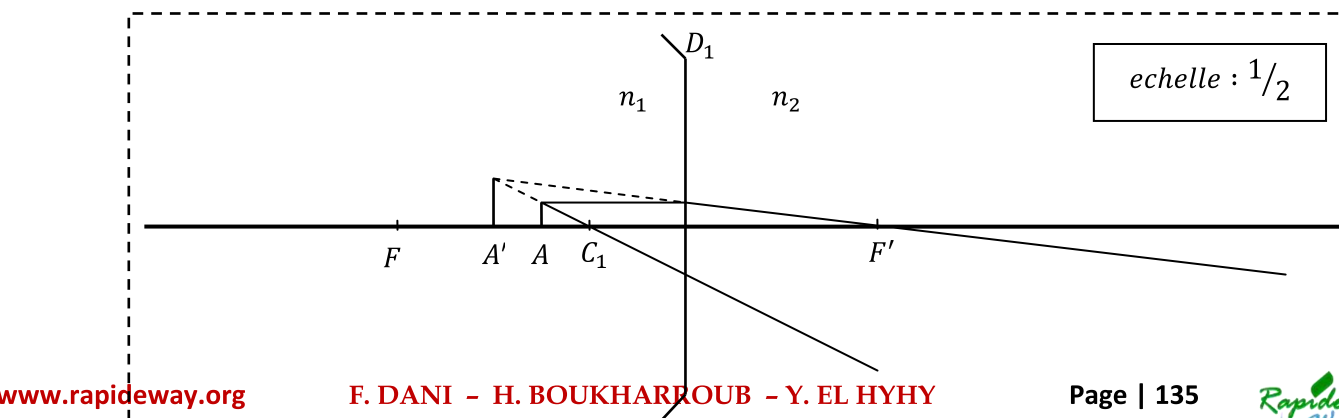
$$\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{SC} \Longrightarrow \frac{1}{\overline{CA}}\left(\frac{n_1}{2} - n_2\right) = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$$

$\rightarrow \overline{CA} = \frac{n_1-2n_2}{2(n_1-n_2)}\overline{CS}$AN :$\overline{CA} = -2cm$

On a $\overline{CA'} = 2\overline{CA} \Longrightarrow \overline{CA'} = -4cm$.

$$\overline{SA} = \overline{SC} + \overline{CA}\quad AN : \overline{SA} = -6cm$$
$$\overline{SA'} = \overline{SC} + \overline{CA'}\quad AN : \overline{SA'} = -8cm$$
$$\overline{SF} = \overline{SC} + \overline{CF}\quad AN : \overline{SF} = -12cm$$
$$\overline{SF'} = \overline{SC} + \overline{CF'}\quad AN : \overline{SF'} = +8cm$$

4. Construction géométrique



Dioptre D_2 : $A \Longrightarrow A_1$

$$\frac{n_2}{\overline{CA_1}} - \frac{n_1}{\overline{CA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{C_2S_2}} \Longrightarrow R_2 = -\overline{S_1C_1} = \overline{S_2C_1} > 0(1)$$

Dioptre D_1: $A_1 \Longrightarrow A'$

$$\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{C_1S_1}} \Longrightarrow R_1 = -\overline{S_1C_1} = \overline{S_1C_1} > 0(2)$$

$$(1)(2) \Longrightarrow \frac{n_2}{\overline{CA_1}} - \frac{n_1}{\overline{CA}} + \frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA_1}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{C_2S_2}} + \frac{n_1 - n_2}{\overline{C_1S_1}} \Longrightarrow -\frac{n_1}{\overline{CA}} + \frac{n_1}{\overline{CA'}} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{\overline{C_2S_2}} - \frac{1}{\overline{C_1S_1}}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{\overline{C_2S_2}} - \frac{1}{\overline{C_1S_1}}\right) = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1}\right)\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

$$= \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1}\right)\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}\right) = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{1}{f'}$$

5. Soit

$$f' = \frac{n_1R_1R_2}{(n_2 - n_1)(R_1 + R_2)} = \frac{n_1R}{2(n_1 + n_2)}(R_1 = R_2 = R)$$

$$f = -f' = \frac{n_1R}{2(n_1 + n_2)}$$

Exercice II :

1. Les distances focales f et f' de système optique équivalent aux deux lentilles L_1 et L_2

On a $HF = \frac{f_1f_2}{\Delta}$ avec $\Delta = -f_1' + e + f_1 = +2cm.$

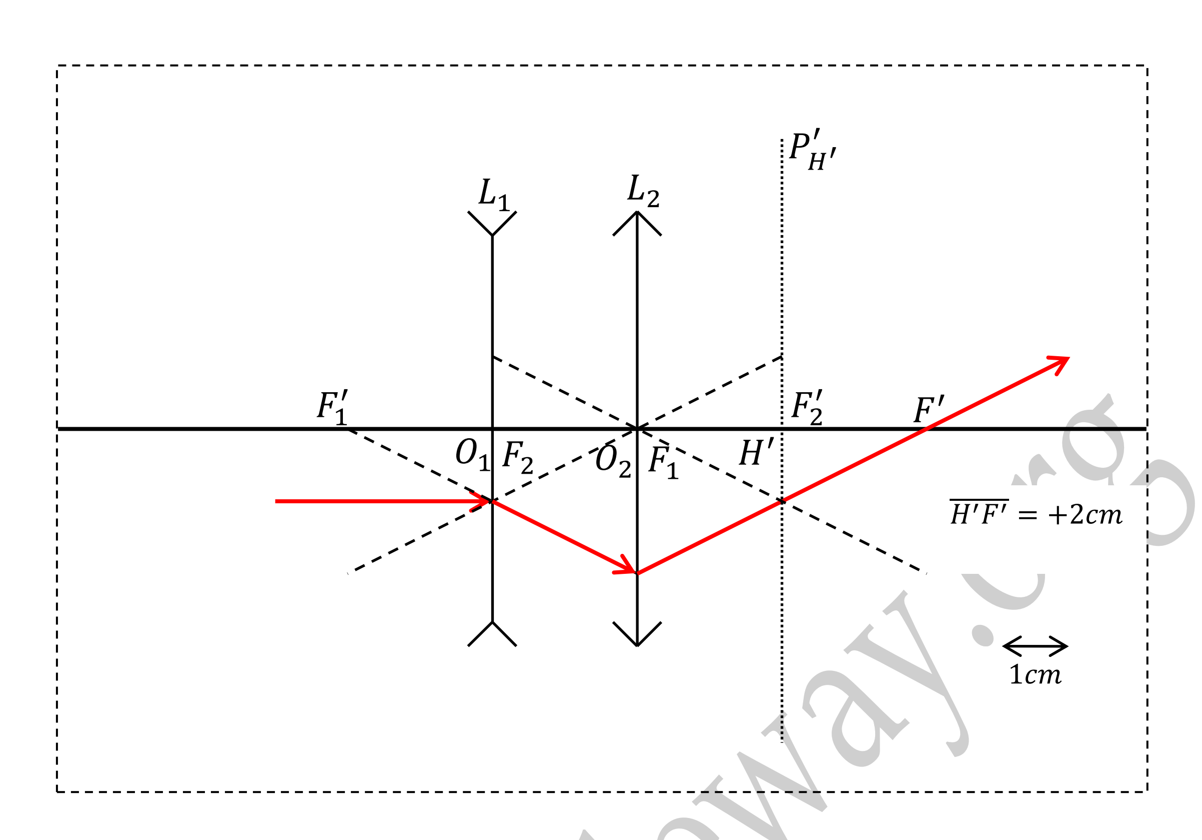
$$HF = f = -2cm./\ f_1' = -2cm,\ \ f_2' = 2cm$$

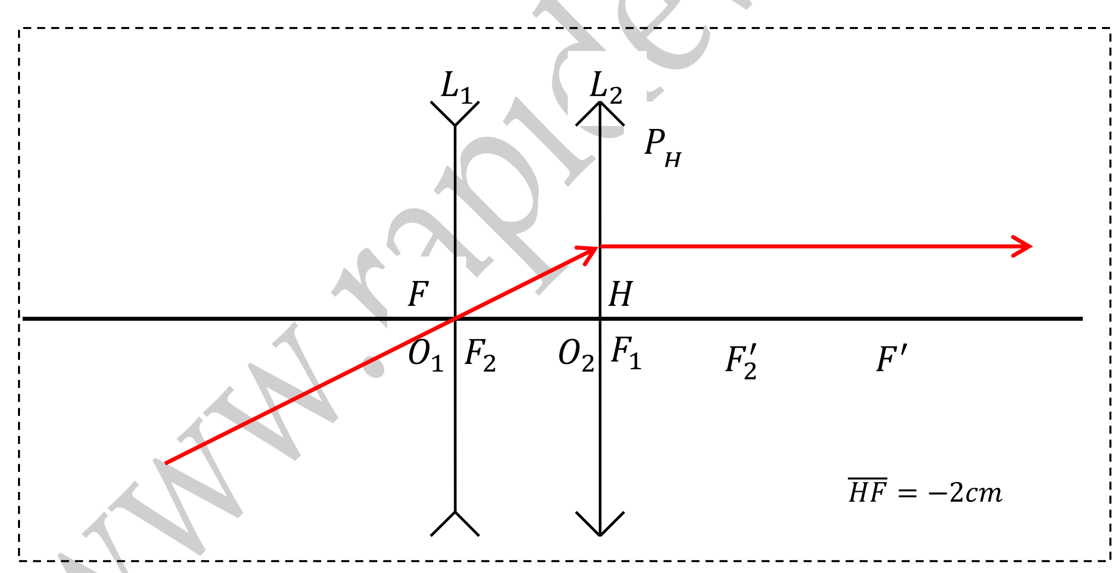
$$\overline{H'F'} = f' = \frac{f_1'f_2'}{\Delta} = +2cm.$$

On a $f' > 0 \Longrightarrow systéme$ équivalent est convergent.

2.

1. Construction géométrique





A partir de la construction

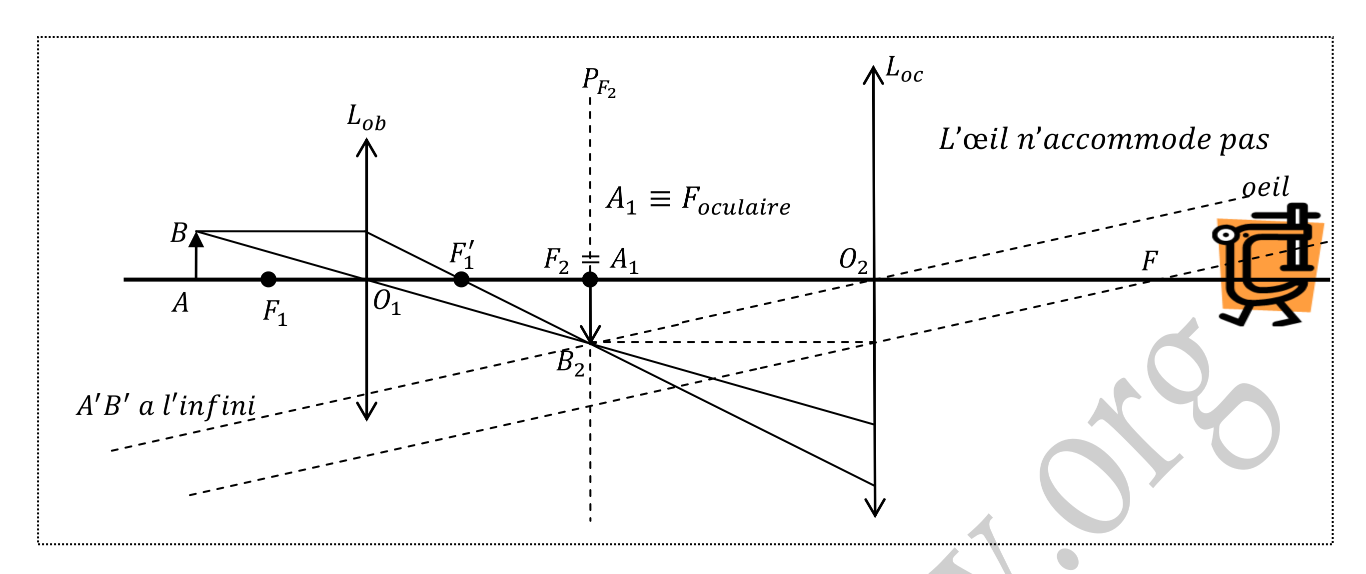
On a : $\overline{HF} = -2cm$; $\overline{H'F'} = +2cm$.

$$\overline{F_1F} = -2cm\,;\, \overline{F_2F'} = +2cm$$

2. Les valeurs des distances focales calculées en 1°) sont égale aux valeurs trouvées géométriquement

Exercice III :

1. Les étudiants doivent noter que dans ce cas $A_1B_1 \in P_{F_2} = plan\ focal\ oculaire$



2. La distance focale f'_{mic} du microscope

$$f'_{mic} = \frac{f'_{ob}f'_{oc}}{\Delta} = \frac{-2 * 0{,}5}{17} = -\frac{1}{17} = -0{,}058cm$$

Pour une mise au point à l' infini, la puissance P

$$P = P\ intinseque = \left|\frac{1}{f'_{mic}}\right| \quad AN: P_{mic} = 1724\ \delta$$

3. Le grossissement commercial

$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\alpha'}{AB} * \frac{AB}{\alpha} = P * d$: Pour l'observatoire normal. $d = 0{,}25m = \frac{1}{4}m$

$G = \frac{P}{4}$AN :$G_{com} = \frac{P_i}{4} = 430$

$$G_{com} = 430$$

Contrôle 2 optiques géométriques SMP-SMA-SMC 2007/2008

Question de cours : (4pts)

Pour un instrument optique définir :

a. Le grandissement linéaire
b. Le grossissement
c. La puissance
d. Le grossissement commercial

Problème :(16 pts)

Sur un banc optique, on place deux lentilles minces $L_1(O_1, F_1, F_1')$ et $L_2(O_2, F_2, F_2')$ de $distances$ focales images respectives $f_1' = 20mm$ et $f_2' = 15mm$. $\overline{O_1O_2} = 70mm$. Un objet réel AB, de hauteur 1,5mm, est placé a 30mm du centre optique de L_1.

1) Déterminer la position de l'image intermédiaire A_1B_1, par rapport a O_1, et la position de l'image finale $A'B'$ par rapport a O_2.
2) Calculer le grandissement linéaire γ de l'image finale.
3) Construire géométriquement (Figure 1, une demi page) les deux images A_1B_1 et $A'B'$ (échelle$1/1$ sur $x'x$ et $10/1$ sur $y'y$, **a respecter SVP**). Quelle est la nature de l'image $A'B'$?
4) Déterminer par construction géométrique (figure 2, même échelle, une demi page) les deux points cardinaux $(F,\ F', H, H')$ du système optique (S) constitué de L_1 et L_2. En déduire **approximativement**$\overline{F_1F}, \overline{F_2'F'}, \overline{H'F'}, \overline{HF}$.
5) Calculer l'intervalle optique : $\Delta = \overline{F_1'F_2}$
6) Calculer, en utilisant les formules de Newton, $\overline{F_1F}$ et$\overline{F_2'F'}$.
7) Calculer :

$$\overline{H'F'} = f' = \frac{f_1'f_2'}{\Delta}\ et\ \overline{HF} = f = \frac{f_1f_2}{\Delta}$$

En déduire $\overline{AH}$ et $\overline{HH'}$ (**ne pas utiliser les valeurs de la question 4**)

8) Construire l'image $A'B'$ de l'objet AB à travers le système centré $(S) = (F, F', H, H')$ (figure 3meme échelle). Quelle est la nature de l'image $A'B'$?
9) Le système est il convergent ou divergent ? justifier.
10) Quelle utilité peut avoir le système étudie.

Corrigés : Contrôle 2 optiques géométriques SMP-SMA-SMC 2007/2008

Question de cours :

a) **Grandissement linéaire Γ.**

On appelle grandissement linéaire ou transversal le rapport de la mesure algébrique de $A'B'$ a celle de AB :

$$\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

b) **Grossissement G.**

G est le rapport de l'angle α' sous lequel on voit l'image depuis la pupille de sortie (Os) du système a l'angle α sous lequel on voit l'objet la ou il est a l'œil nu sans instrument.

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

c) **Puissance P**

La puissance d'un instrument est le rapport de l'angle sous on voit l'image donnée par l'instrument a la longueur de l'objet.

$$P = \frac{\alpha'}{\overline{AB}}$$

d) **Grossissement commercial**

G_c Est défini en choisissant la distance minimum de vision distante égale à 0.25 m

$$G_c = \frac{\alpha'}{\alpha_0}, avec : \alpha_0 = \frac{\overline{AB}}{0.25}, d'ou : G_c = \frac{0.25\alpha'}{\overline{AB}} = \frac{P_i}{4} = \frac{1}{4f'}$$

Problème :

1) $AB \Longrightarrow_{/L_1} A_1B_1 : \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'}.$

$\Longrightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{\overline{O'A}}$ Donc $\overline{O_1A_1} = \frac{f_1'.\overline{O_1A}}{f_1'+\overline{O_1A}}$

$AN: \overline{O_1A_1} = 60mm.$

$A_1B_1 \Longrightarrow_{/L_2} A_2B_2 : \frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'}.$

$\Longrightarrow \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2A_1}}$ Donc $\overline{O_2A'} = \frac{f_2'.\overline{O_2A_1}}{f_2'+\overline{O_2A_1}}$

Avec $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2A'} + \overline{O_1A_1} = -10mm$

AN : $\overline{O_2A'} = -30mm$

2) Grandissement :

On a $\gamma = \gamma_1.\gamma_2 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}.\frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = (-2).(3) = -6$

3)

4)

Mesure approximative d'apures la construction géométrique

$$\overline{F_1F} \simeq -10mm$$

$$\overline{F_2'F'} \simeq 10mm$$

$\overline{H'F'} \simeq -10mm$

$\overline{HF} \simeq 10mm$

5) $\Delta = \overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2}$

$$= -f_1' + \overline{O_1O_2} + f_2$$

$$AN : \Delta = 35mm$$

6) $F \Longrightarrow_{/L_1} F_2$

(L_1) : Formule de newton : $\overline{F_1F}.\overline{F_1'F_2} = f_1'f_1$

$$\overline{F_1F} = \frac{f_1'f_1}{\overline{F_1'F_2}} = \frac{f_1'f_1}{\Delta} = -\frac{400}{35} = -11.4mm$$

$$F_1' \Longrightarrow_{/L_2} F'$$

On applique la formule de newton pour la lentille (L_2) : $\overline{F_2F_1'}.\overline{F_2'F'} = f_2f_2'$

$$\Rightarrow \overline{F_2'F'} = \frac{f_2f_2'}{\overline{F_2F_1'}} = -\frac{f_2f_2'}{\overline{F_1'F_2}} = -\frac{f_2f_2'}{\Delta}$$

$$AN: \overline{F_2'F'} = 6.5\text{mm}$$

7) $f' = \overline{H'F'} = -\frac{f_1'f_1}{\Delta}$ AN : $f' = -8.5mm$

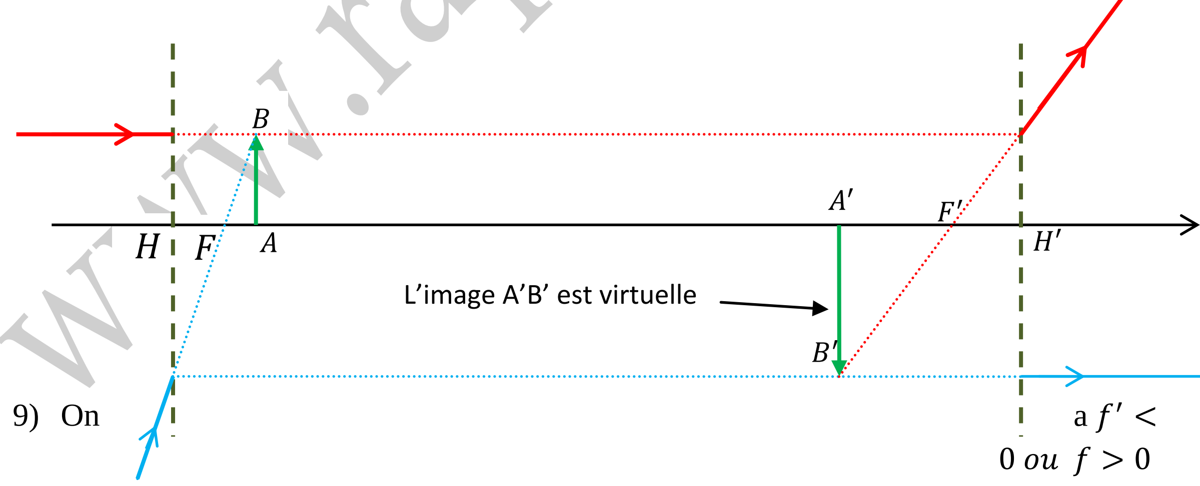
$f = \overline{HF} = \frac{f_1f_2}{\Delta}$ AN : $f = +8.5mm$

$\overline{AH} = \overline{OA_1} + \overline{O_1F_1} + \overline{F_1F} + \overline{FH} \Longrightarrow \overline{AH} = -10mm$

$\overline{HH'} = \overline{HF} + \overline{FF_1} + \overline{F_1O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2'} + \overline{F_2'F'} + \overline{FH'}$

$AN : \overline{HH'} = 140mm$

8) Construction géométrique : de l'image $\overline{A'B'}$



9) On a $f' < 0$ ou $f > 0$

$\Longrightarrow$ *le systeme centré est divergent*

10) Le système donne une image virtuelle agrandit d'objet virtuelle
Alors parle d'un oculaire

Chimie Générale :

Extrait de contrôle de chimie SMP-SMA-SMC2004

I/ Le cyanure d'argent est un peu très soluble.

1) Calculer la solubilité de $AgCN$ dans l'eau pure en supposant que Ag^+ et CN^- sont des ions indifférents.
2) En fait, l'ion CN^- est une base faible. Etablir l'expression de la solubilité de $AgCN$ en fonction de $[H_3O^+]K_s et\ K_a$.
3) En déduire la valeur de la solubilité de $AgCN$ dans une solution tampon de $pH =$ 3. Comparer les deux valeurs de la solubilité et conclure.
Données : à 25 °C $K_s(AgCN) = 1{,}6.10^{-14}$; $K_a(HCN/CN^-)$ =7,24.$10^{-chi7aja}$

II/ A partir du couple Fe^{3+}/ Fe^{2+} , on réalise les deux demi-piles suivantes à 25 °C :
-Compartiment 1 : une électrode de platine plangeant dans une solution aqueuse contenant des ions Fe^{3+} (10^{-3}M) et des ions Fe^{2+}(10^{-3}M).
-Compartiment 2 : une électrode de platine plongeant dans une solution aqueuse contenant des ions Fe^{3+}(10^{-3}M), des ions Fe^{2+}(10^{-3}M) et des ions F^-(10^{-1}M).
L'ion F^- forme avec l'ion Fe^{3+} le complexe FeF^{2+} tandis que l'ion Fe^{3+} n'est pas complexé.
1)Ecrire les réactions ayant lieu dans cheque compartiment.
2)Donner l'expression des potentiels π_1 et π_2 relatifs aux compartiment 1 et 2. Sans faire de calcul, comparer ces potentiels.
3)On constitue une pile en associant les deux demi-piles décrites ci-dessus. Faire un schéma de cette pile en indiquant les polarités, le sens de déplacement des électrons et celui du courant électrique.
4)Sachant que la f.e.m de la pile ainsi formée est égale à 0,31 V, calculer la concentration des ions Fe^{3+} contenus dans le compartiment 2.
5)Calculer la constante de formation K_f du complexe FeF^{2+}.

Données : $\frac{RT}{F} Ln(x) = 0{,}06 log_{10}(x)$ à 25 °C

Corrigés Extrait de contrôle de chimie SMP-SMA-SMC2004

I/

1) La solubilité de $AgCN$:

$AgCN_{(s)} \leftrightarrow Ag^{+}{}_{(aq)} + CN^{-}{}_{(aq)}$

S=$[Ag^+] = [CN^-]$ $K_s = [Ag^+].[CN^-] = S^2$

Donc S=$\sqrt{K_s}$

AN : S=$\sqrt{1{,}6.10^{-14}}$ = $1{,}265.10^{-7} mol/l$

2) $$CN^- + H_2O \leftrightarrow HCN + OH^-$$

$$K_a = \frac{[CN^-].[H_3O^+]}{[HCN]}$$

On a S=$[Ag^+] = [CN^-] + [HCN]$

=$[CN^-]\left(1 + \frac{[HCN]}{[CN^-]}\right)$ = $[CN^-]\left(1 + \frac{[H_3O^+]}{K_s}\right)$

=$\frac{K_s}{S}\left(1 + \frac{[H_3O^+]}{K_s}\right)$

Donc S=$K_s\left(1 + \frac{[H_3O^+]}{K_s}\right)^{1/2}$

3) $pH = 3$ donc $[H_3O^+] = 10^{-3}M$

$$S = 1{,}487.10^{-4}M$$

Alors : La solubilité de $AgCN$ augmente lorsque le pH diminue.

II/

1) Les réaction ayant lieu dans chaque compartiment

Compartiment-1 : $Fe^{3+} + 1e^- \leftrightarrow Fe^{2+}$

Compartiment-2 : $Fe^{3+} + 1e^- \leftrightarrow Fe^{2+}$

$$Fe^{3+} + F^- \leftrightarrow FeF^{2+}$$

2) Les potentiels π_1 et π_2 relatifs au compartiment 1 et 2

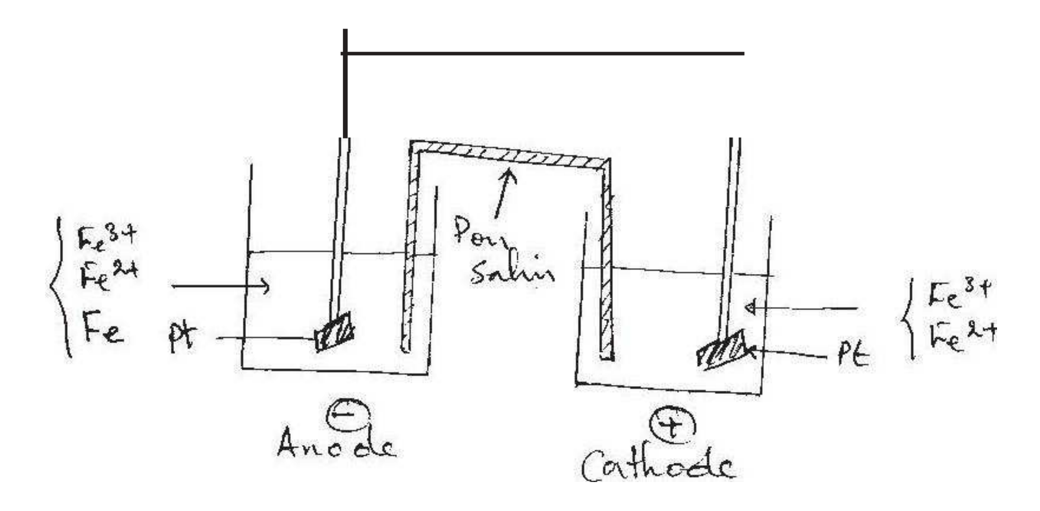
Compartiment-1 :$\pi_1 = \pi_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} = \pi^{chi7aja}{}_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} + 0{,}06log_{10}(\frac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}]})$

Compartiment-2 : $\pi_2 = \pi_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} = \pi^{chi7aja}{}_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} + 0{,}06log_{10}(\frac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}]})$

On a $[Fe^{3+}]_2 < [Fe^{3+}]_1$

3)

I courant éléctrique



4) On a E= $\pi_{ca} - \pi_{an} = \pi_1 - \pi_2$

$$= 0{,}06 \log \frac{[Fe^{3+}]_1}{[Fe^{2+}]_1} - 0{,}06 \log \frac{[Fe^{3+}]_2}{[Fe^{2+}]_2}$$

Ceci équivalent à $[Fe^{3+}]_2 = [Fe^{2+}]_2 . 10^{-\frac{E}{0,06}}$

A.N : $[Fe^{3+}]_2 = 6{,}813 . 10^{-9} M$

5) La constante de formation K_f du complexe FeF^{2+}

$$Fe^{3+} + F^- \leftrightarrow FeF^{2+}$$

t=0	C	C	0
teq	C-x	C-x	x

$[FeF^{2+}] = 9{,}999 . 10^{-4} M [F^-] = 9{,}9 . 10^{-3} M$

On a $K_f = [FeF^{2+}]/[Fe^{3+}] . [F^-]$

A.N $K_f = 1{,}483 . 10^6$